T H E S E S

présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITE DE PARIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Antoine BRUNEL

1ère THESE - SUR QUELQUES PROBLEMES DE LA THEORIE ERGODIQUE PONCTUELLE.

2ème THESE - PROPOSITION DE LA FACULTE

Soutenues le 19 décembre 1966 devant la Commission d'Examen

MM. de POSSEL — Président

LELONG, NEVEU — Examinateurs

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544324_0004

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

T H E S E S

présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITE DE PARIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Antoine BRUNEL

1ère THESE - SUR QUELQUES PROBLEMES DE LA THEORIE ERGODIQUE PONCTUELLE.

2ème THESE - PROPOSITION DE LA FACULTE.

Soutenues le 19 décembre 1966 devant la Commission d'Examen

MM. de POSSEL — Président

LELONG, NEVEU — Examinateurs

# FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

## PROFESSEURS

Doyen M. ZAMANSKY

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Mlle | BRILLOT | T | Analyse supérieure | | JEAN | T | Physique nucléaire (Orsay) |
| | PAUMANT | T | Anatomie et histologie comparée | | MAYLLER | T | Physique NPCN |
| | GRASSE | T | Evolution des êtres organisés | | BERGERARD | T | Zoologie (Orsay) |
| | PREVOST | T | Chimie Organique | | BERTRIN | T | Electronique (Orsay) |
| | WYART | T | Minéralo & Cristallo | | BOUDENFERS | T | Radiochimie |
| | TRUHAUT | T | Zoologie | Mme | COUTURE | T | Thermo et mécn physiques |
| | MANGENOT | T | Biologie végé (Orsay) | | KLEINBERGER | T | Géologie des grandes régions du globe (Orsay) |
| | AUDER | T | Physique quantique et relativité | | FRANC | T | Biologie animale PCB |
| | MONNIER | T | Physiologie générale | | SCHNELL | | Botanique tropicale |
| | PIVETTEAU | T | Paléontologie | | NTLKOWSKI | T | Physiologie végétale |
| | ROCARD | T | Physique ENS | | AUNER | T | Chimie biologique |
| | CARTAN | T | Mathématiques ENS | | BAUDOIN | T | Biologie animale PCB |
| | LAFFITTE N | T | Chimie générale | | BEAUMONT | | Biologie animale NPCN |
| | COULOMB | T | Physique du globe | | RIAMONT | | Géophysique ionosphère |
| Mlle | COUSIN | T | Biologie animale SPCN | | BOUREAU | T | Botanique |
| | CHRETIEN | T | Chimie minérale | | CURIE D | | Physique NOP |
| | BOCQUET | T | Zoologie | | DURAND DELGA | T | Géologie |
| | KASTLER | T | Physique ENS | | PREOM | T | Chimie organique (Orsay) |
| | EPHRUSSI | T | Génétique | | HELLER | T | Physiologie végétale |
| | RIVIERE | T | Géologie SPCN à Bellevue (Orsay) | | TORTRAT | T | Calcul des probabilités |
| | GAUTHERET | T | Biologie végétale PCB | | CAILLEUX | T | Géologie SPCN |
| | LUCAS R | T | Recherches Physiques | | MAGNAN | | Physique électronique |
| | TONNAS A | T | Biologie cellulaire | | DAUDEL | T | Mécanique ondulatoire appli à la Chimie |
| | ARNULF | T | Optique appliquée | | | | Théor à à la Phys Nucléaire |
| | MORAND | T | Physique enseignement | Mlle | FOURCROY | | Biologie végétale NPCN |
| | HOLLELLET | T | Physique PCB | Mme | CHOQUET BRUHAT | | Mécanique analytique et mécn céleste |
| | PORTIER | T | Mécanique sup des fluides | Mlle | VERL | T | Physiologie générale |
| | DRACH | T | Zoologie | | LWOFF | T | Microbiologie |
| | QUENEY | T | Méca & Dynamique atmos | | NEETRUNCK | T | Méca phys & expérimentale |
| | GALLIEN | T | Embryologie | | LACOMBE | T | Métallurgie des métaux nucléaires (Orsay) |
| | EICHORN | T | Botanique | | BROCHARD | T | Physique PCB (Orsay) |
| | DE CUGNAC | T | Biologie végétale NPCN | | CARANNTA | T | Mécanique générale |
| Mlle | CAUCHOIS | T | Chimie physique | | LENEUR | T | Math I (Orsay) |
| | THELLIER | T | Physique du globe | | MAZET | T | Méca générale (Orsay) |
| | L'HERITIER | T | Biologie générale Orsay | | CAIRE | | Géographie physique et géo dynamique |
| | GRIVET | T | Radioélectricité Orsay | | COMOLET | | Méca des fluides |
| | POINCIN | T | Mécanique générale | | CORABOEUF | T | Physiologie animale (Orsay) |
| | DU BARG | T | Arith & Théorie des nombres | | DELLOUE | T | Physique de l'atmosphère |
| | QUELET | T | Chimie organique | | GONENFLOT | | Botanique II (Orsay) |
| | GAGNARD | T | Géophysique appliquée | | NOUILLON | | Biologie animale PCB |
| | CHARPENTIER | T | Chimie des macromolécules | | JULLIEN J | | Chimie NPCN (Orsay) |
| | CUVILLIER | T | Microparasitologie | | MALGRANGE | T | Technique Math de la physique (Orsay) |
| | JUNG | T | Géologie | | OLIVIER | | Anatomie |
| | TRILLAT | T | Microscopie et diffraction électro | | NOZERAN | T | Botanique II (Orsay) |
| | WIEMANN | T | Chimie organ à séne | | BLANC-LAPIERRE | T | Physique ENS (Orsay) |
| | JACQUINOT | T | Spectroscopie et Physique céleste (Orsay) | | CHEVALGEON | T | Botanique (Orsay) |
| | VASSY | T | Physique de l'environnement | | KAHANE | T | Mathématiques (Orsay) |
| | DESTOUCHES | T | Théorie physiques | | KAMUEL | T | Mathématiques ENS féminin |
| | AMIEL | T | Chimie générale | | KOURGANOFF | T | Astronomie (Orsay) |
| | ROCART | T | Minéralo & Cristallo | | THIRY | T | Méca célesti |
| | MATHIEU J P | | Physique optique | | ABELES | | Physique NPCN |
| | DOUTEAUX | T | Cytologie | | AMAT | T | Physique PCB |
| | MAY | T | Zoologie | | AUBOIN | T | Géologie |
| | CROQUET | T | Théorie des fonctions et topologie | Mme | BENOIT-GUEUTAL | T | Physique nucléaire et radioactivité (Orsay) |
| | FELDMANN | T | Biologie végétale marine | | ROUCIS | | Biologie marine Villefranche/mer |
| | QUENEY | T | Physique des solides (Orsay) | | BRUHAT | T | Math NPC |
| | JONT | T | Physiologie comparée | | BALMIN | T | Géologie historique (Orsay) |
| | FORTET | T | Calcul des probabilités et Phys Mathém | | CHABBAL | T | Physique NOP (Orsay) |
| | SCHWARTZ | T | Calcul dif & Integral | | DENEUVILLE | T | Math propé |
| | CHOUARD | T | Physiologie végétale | | D'ESPAGNAT | T | Physique théorique (Orsay) |
| | MALAVARD | T | Aviation (Tech Aéron) | | FURON | T | Géologie SPCN |
| | NORMANT | T | Synthèse organique | Mme | GANS | T | Génétique |
| | BENARD | T | Chimie minérale | | GENTYES | | Biologie végétale PCB |
| | BUVAT | T | Botanique ENS | | GUILBERT | | Physique CUS Orléans |
| | DAOUST | T | Statistique mathématique | | HUPE | T | Pétrographie |
| | SOULAIRAC | T | Psychophysiologie | | MOLLARDE | T | Biologie générale |
| | ULRICH | T | Physiologie Vég Appl | | LEONS | T | Analyse numérique |
| | MARECHAL | T | Optique théor & appl | | MAFFTE | T | Chimie PCB |
| | KAHANAHN | T | Théorie chimique | | MEYER | | Physique propédeutique |
| | CHADEFAUD | T | Botanique | | PANCEL | | Biologie générale |
| Mlle | LE PENTON | T | Physiol de la nutrition | | RAVIER | | Pétrographie |
| | LELONG | T | Applications de l'analyse à la géométrie | | ROBEAU | T | Méca théoriques des fluides |
| | DEVILLERS | T | Anatomie & Histe compar | | ROUBINE | | Electronique |
| | ERESMANN | T | Topologie algébrique | | ALBEA | T | Chimie PCB |
| | FRANCON | T | Physique SPCN | | UEBERSFELD | T | Electronique |
| | GLANSRAND | T | Géographie phys & géol | | YVON | T | Théories physiques |
| | GODEMENT | T | Mathématiques NOP | | HERVE | T | Mathématiques |
| | PINOT | T | Technique math de la phys | | NERON | T | Math NPC (Orsay) |
| | ROCH | T | Géologie | Mme | PECKER WIMEL | T | Astrophysique |
| | SCHATZMANN | T | Astrophysique | | BALLANGER | | Physique NPC |
| | TERMIER | T | Géologie générale | | LE CORRE | T | Electricité |
| | ZAMANSKY | T | Mathématiques générales | | DELCROIX | T | Physique théorique (Orsay) |
| | LENOUNER | T | Physique NOP | | GOURDIN | | Physique théorique des hautes energies (Orsay) |
| | RIET | T | Géodésie Orsay | | LEHMANN | T | Phys Exp des hautes énergies |
| | ROUTNIER | T | Géologie appliquée | | NATAF | T | Physique nucléaire et radioactivité (Orsay) |
| Mme | TONNELAT | T | Physique théorique | | ECHALIER | | Biologie animale PCB |
| | BERNIER | T | Mathématiques NPC | | BARRAUD | | Physiologie cellulaire |
| | BOUCHAY | T | Chimie générale | | LIORET | | Physiologie végétale (Orsay) |
| | ANDRAU | T | Sismotectonique générale | | DARS | | Géologie structurale et Géologie appliquée |
| | BRUHAT | T | Chimie systématique | | CAMI POUS | T | Botanique (spécialisation) |
| | LEVY M | T | Physique théorique des hautes énergies (Orsay) | | VICHNETWSKY | T | Mécanique industrielle |
| Mme | CHAIX | T | Chimie biologique | | BLAQUIERE | | Electronique (Orsay) |
| Mme | MABEL PT | T | Biologie végétale PCB | | ARNOUS | T | Physique théorique |
| | PAUTHIER | T | Chimie générale | | TATIBOUET | | Chimie (CSU Orléans) |
| | BRUN | T | Mécanique des fluides I | | MALLIAVIN | T | Mathématiques suppl (Orsay) |
| | LEDERER | T | Chimie biologique (Orsay) | | GAUDEMAR | | Chimie suppl |
| Mme | DUBREIL | T | Mathématiques (Agreg ) | | PEREZ Y JORBA | | Physique Exp des hautes énergies (Orsay) |
| Mme | LELONG | T | Mathématiques à ENS | | DAVID | T | Chimie inorganique Orsay |
| | BELLAIR | T | Géologie SPCN | | BOURSE | T | Mécanique théorique |
| | COTTE | T | Physique électronicité | | ROSCH | T | Astronomie |
| | DUBOIS J E | T | Chimie organique | | GUY | T | Physique expérimentale |
| | LAMOTTE | T | Zoologie ENS | | LAZARD | | Math NPC |
| | MICHEL A | T | Chimie minérale Orsay | | MOREL P | | Physique NPC |
| | OLMER | T | Energétique générale | | ARRAC | | Programmation |
| | ROUAULT | T | Electricité (Orsay) | | LEFEBVRE | | Chimie NPC |
| | GAUTHIER | T | Mécanique appliquée | | CHAPEVELLE | | Biochimie |
| | BARCHEWITZ | T | Chimie physique | | BENOIT | | Physique CPEM |
| | BROSSEL | T | Physique atomique | | RIO | | Chimie CPEM |
| | BUNER | T | Physiologie comparée | | JAUSSEN | | Géologie ENS |
| | CAMUS | T | Physiologie végétale | | PREVOST G | | BV CPEM |
| | CASTAING | T | Physique II Thermo (Orsay) | | FAVARD P | | BA CPEM |
| | CURIEN | T | Biochimie & cellul | | VILKAS | | Chimie CPEM |
| | MOYSE | T | Physiologie végétale (Orsay) | Mlle | PICON | | Chimie CPEM |
| Mme | CHAMIAUX-COTTON | T | Evolution des êtres organisés | | LEGRAND | | Astronomie |
| | POROMPES | T | Zoologie | | COHEN TANNOUDJI | | Physique NPC |
| | PULLMANN | T | Chimie quantique | | TAVERNIER | | Physique CPEM |
| | TELLAC | T | Physique Fond. & radioactivité (Orsay) | Mme | ROLEN | | Physique CPEM |
| | TONNELAT | T | Elect. Physico-chim (Orsay) | | DURAND M | | BA NPCN |
| | VILLE | T | Econométrie | | PASCAUD | | Physiologie |
| | WILLEMART | T | Chimie PCB | Mme | PETIT | | BA CPEM |
| | DODE | T | Chimie (Orsay) | | BROUSSE | | Géologie (Orsay) |
| | FREYMANN | T | Recherches physiques | | CADRAC | | Physique agrégation (Orsay) |
| | QUINCHET | T | Biologie végétale SPCN (Orsay) | | LEBERE | | Zoologie (Orsay) |
| | ROLLET | T | Chimie minérale | | SCHEFFER | | Microbiologie (Orsay) |
| Mlle | JOHEN | T | Chimie SPCN | | de GENNES | | Physique des solides (Orsay) |
| | CHEVALLEY | T | Géométrie algéb et théorie des groupes | | NOU | | Physique nucléaires sup (Orsay) |
| | ARNOULT | T | Electronique (Orsay | | CLAUSER | | Chimie biologique (Orsay) |
| | CHAPELLE | T | Physique I (Orsay) | | CHEVALIER | | Physiologie animale (Orsay) |
| | DELARGE | T | Mathématiques I (Orsay) | | JAKOVICS | | Physique atomique (Orsay) |
| | DENY | T | Mathématiques générales (Orsay) | | PALE-VARANT | | Physique nucléaire (Orsay) |
| | GERMAIN | T | Mécanique théorique des fluides | | PEYSSON | | Chimie suppl (Orsay) |
| | LUCAS | T | Géologie | | CERF | | Mathématique (Orsay) |
| | ALLARD | T | Chimie physique | | LICHAT | | Physique |
| | BERTHELOT | T | Physique des particules fondamentales (Orsay) | | RIGAUDY | | Chimie S.P.C.N. |
| | BRICARD | T | Météor et physique de l'atmosphère | | SCHWALT | | Idem |
| Mme | ALBE FESSARD | T | Psycho physio | | PUNERMET | | Electricité générale |
| | FRIEDEL | T | Physique des solides (Orsay) | | CAILLONCUBS | | Chimie C.P.E.N. |
| | JULIA M | T | Etudes des endomorphismes compresso | | UUBERT | | biochimie |
| | LENOIR | T | Biologie animale NPCN (Orsay) | | LAVOREL | | biologie physico chimique |
| Mlle | QUINTIN | T | Electrochimie | | MOREL F. | | physiologie comparée |
| | MONOD | T | Chimie du métabolisme | | TALBOT | | génétique chimique |
| | BENOIT | T | Physio animale (Orsay) | Mme | ROUGAREDE | | botanique |
| | DE POMEREL | T | Analyse numérique | | FRANCOIS | | zoologie |
| | CHARLOT | T | Chimie analytique | | IVANOFF | | océanographie physique |
| | LEMEE | T | Ecologie végétale (Orsay) | | CADIOT | | chimie organique |
| | GUERIN | T | Chimie NPC (Orsay) | | NARUCN | | physique propédeutique |
| | CHATELET | T | Chimie PCB | | MOZIERRE | | physique générale |
| | | | | | MOR | | physique propédeutique |
| | | | | | SLONIMSKI | | génétique |

Secrétaire général R. ROUGAN

A MONSIEUR RENE de POSSEL

A MA FEMME

# INTRODUCTION

Pour situer mon travail et en expliquer l'orientation il m'a paru utile de donner dans le premier chapitre un historique sommaire du secteur de la théorie ergodique où je me suis cantonné. Ce secteur comprend essentiellement deux types de problèmes ; d'une part l'étude de la convergence ponctuelle de certaines suites de moyennes ou de rapports considérées dans les extensions successives des premiers théorèmes de G.D. Birkhoff et E. Hopf, d'autre part les problèmes de mesures invariantes, intimement liés aux précédents. Les fondateurs de la théorie ergodique (mathématique) se sont intéressés au demi-groupe $\mathcal{G}$ engendré par une transformation $\theta$, opérant dans un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (où $\Omega$ est l'espace, $\mathcal{A}$ la tribu des ensembles mesurables et $\mu$ la mesure) et conservant la mesure. Les premiers énoncés ergodiques font intervenir, plutôt que $\theta$, l'endomorphisme $f \longrightarrow f \circ \theta$, de l'espace $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ des fonctions réelles intégrables sur $\Omega$, induit par $\theta$. Une première façon d'étendre la théorie a été de remplacer le demi-groupe $\mathcal{G}$ à un générateur par des demi-groupes de transformations plus généraux. Ceci ne concerne pas le présent travail. Une deuxième extension qui s'est imposée à la suite des travaux de Doob sur les processus de Markov a été de considérer les endomorphismes qui ne soient plus nécessairement induits par des transformations.

C'est à l'étude des propriétés fondamentales de ces endomorphismes, les contractions d'un espace $\mathbb{L}^1$, qu'est consacré le chapitre II. Ces propriété-

tés ne sont pas nouvelles. Elles ont d'abord été développées par R.V. Chacon, puis par J. Neveu au point de vue des probabilités. Le lemme ergodique que j'ai découvert en 1963, en essayant de simplifier la démonstration originale du théorème de Chacon et Ornstein, permet de les retrouver aisément. Ces propriétés, en particulier l'expression explicite de la limite en termes de probabilité donnée par Chacon, ont été indiquées par moi au séminaire Fortet (1965). P.A. Meyer partant d'une traduction de ce lemme dans le langage de la théorie du potentiel a exposé ces différents résultats [M] . En 1965, Akcogln a généralisé mon lemme en utilisant les méthodes de Chacon.

Je montre dans le dernier paragraphe que le lemme d'Akcogln peut se déduire simplement du mien.

Les résultats obtenus par N. Dunford et J.T. Schwartz dans l'étude difficile des demi-groupes d'opérateurs à un nombre fini de paramètres m'avaient incité à rechercher des théorèmes ergodiques pour des suites d'opérateurs positifs et bornés. Au chapitre V sont exposés les résultats que j'ai obtenus dans cette direction. La notion de D-ergodicité, introduite dans ce chapitre, se trouve être, lorsque $\mathfrak{B}$ est dénombrable, exactement celle pour laquelle le théorème ergodique général assorti d'un théorème d'identification de la limite sont vrais. Le dernier paragraphe contient l'étude d'un cas particulier où une vérification de D-ergodicité est effectuée.

Les problèmes de mesures invariantes font l'objet des chapitres III et IV. Le chapitre III contient les résultats les plus récents que j'ai obtenus en étudiant les propriétés des "suites faiblement errantes" (f-e)

de Hajian et Kakutani, généralisées par J. Neveu. C'est une question relative à la densité de ces suites qui m'a conduit à la notion de suite m-faiblement errante (m.f.e). Je démontre pour ces suites le théorème de densité qui avait été conjecturé par Hajian et Y. Ito pour les suites (f.e). Au cours de ces recherches, j'ai été amené à considérer des formes linéaires invariantes qui m'ont permis d'envisager sous un jour nouveau le théorème de J. Neveu sur les points fixes d'une contraction.

Mes résultats les plus anciens sont groupés au chapitre IV. Quelques mois après Ornstein, j'avais réussi à construire un contre-exemple résolvant le problème de Halmos relatif à l'existence d'une mesure, finie ou $\sigma$-finie, équivalente à la mesure initiale et invariante sous une transformation donnée $\theta$. Ceci revient à résoudre l'équation fonctionnelle $f(x) = f(\theta x)\,\omega(x)$ où $\omega$ est le Jacobien (dérivée de Radon-Nikodym) de $\theta$, les solutions f étant recherchées dans l'ensemble des fonctions mesurables, strictement positives et finies p.p. La condition d'existence que je donne peut d'ailleurs s'appliquer dans le cas plus général où l'on ne suppose pas que $\omega$ soit le Jacobien de $\theta$. Je n'ai pas repris la construction du contre-exemple, mentionné plus haut, qui a déjà fait l'objet d'un article paru dans le "Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie".

Le secteur de la théorie ergodique auquel je me suis intéressé a pour toile de fond la théorie de la mesure telle que me l'a enseignée le Professeur de POSSEL dont j'ai eu la chance exceptionnelle d'être l'Assistant

à la Faculté des Sciences d'Alger. C'est lui qui m'a initié aux Mathématiques modernes et c'est lui aussi qui m'avait conseillé la lecture de l'article de F. Riesz qui a décidé de ma vocation à la théorie ergodique. Qu'il veuille trouver dans ce travail que je lui dédie l'expression de mon affection et de ma reconnaissance. Je dois aussi beaucoup au Professeur J. Neveu qui s'est intéressé à mes recherches et m'a donné de nombreux et utiles conseils. Je remercie le Professeur Lelong qui a bien voulu participer à mon jury de thèse et m'a proposé le second sujet. Il me faut ajouter que mon article sur les mesures invariantes a été publié grâce au Professeur J. Boclé que je tiens à remercier aussi.

# CHAPITRE I

## Historique sommaire

En 1885 Boltzmann a introduit en Mécanique la notion de système ergodique (ergos, en grec, signifie énergie). C'est à propos de ces systèmes que Henri Poincaré démontra en 1890 le célèbre théorème de récurrence qui marque la naissance de la théorie ergodique. Nous nous bornerons à quelques indications sur ces deux points après avoir énoncé le premier théorème ergodique achevé établi par G.D. Birkhoff en 1931.

Théorème 1. (Birkhoff)[2] Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré fini ou $\sigma$-fini et $\Theta$ une application mesurable de $\Omega$ dans lui-même qui conserve la mesure, c'est-à-dire telle que $\int (g \circ \Theta) d\mu = \int g \, d\mu$ pour tout $g \in \mathbb{L}^1(\Omega)$. Si f est donné dans $\mathbb{L}^1(\Omega)$ les moyennes

$$(1) \qquad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ \Theta^k$$

convergent (p.p.), quand $n \longrightarrow \infty$, vers un élément $\bar{f}$ de $\mathbb{L}^1(\Omega)$. $\bar{f}$ est invariantvis à vis de $\Theta$, $\bar{f} = \bar{f} \circ \Theta$ et $\int \bar{f} \, d\mu = \int f \, d\mu$.

Appliquons ce résultat au cas particulier suivant :
$\Omega$ est une variété compacte, d'énergie constante, de l'extension en phase d'un système mécanique conservatif S ; $\Theta$ est l'application qui, à tout point x de $\Omega$, représentant l'état de S à l'instant 0, fait correspondre le point $\Theta x$ représentant S à l'instant +1 ; la mesure invariante $\mu$ (finie dans ce cas) découle de l'invariant fondamental de Lionville pour de tels sys-

tèmes. Alors si f est l'indicateur d'une partie mesurable et non négligeable E de $\Omega$ le résultat de Birkhoff montre que presque tout point x de E a une infinité de successeurs $\Theta^n x$ dans E. En outre si les seuls éléments h de $\mathbb{L}^1(\Omega)$ invariants ($h \circ \Theta = h$) sont les fonctions constantes alors il existe une infinité de points $\Theta^n x$ dans l'une quelconque des parties mesurables et non négligeables de $\Omega$ et ceci pour presque tout $x \in E$. Ce sont ces propriétés qu'affirme le théorème de Poincaré. Un système S vérifiant ces conditions est un système ergodique. L'importance de cette notion en Mécanique statistique vient du fait que, si une fonction f de $\mathbb{L}^1(\Omega)$ mesure une grandeur observable liée au système, les moyennes temporelles (1) convergent (p.p.) vers la constante $\frac{1}{\mu(\Omega)} \int f \, d\mu$ qui représente la valeur moyenne de f dans $\Omega$.

Dans le théorème que nous venons d'exposer la suite de fonctions (1) converge ponctuellement. Quelques semaines après Birkhoff, J. von Neumann démontrait un résultat analogue concernant les moyennes (1) formées avec un élément f de $\mathbb{L}^2(\Omega)$, la convergence étant prise cette fois au sens des moyennes quadratiques. C'est à partir de là que la distinction s'est faite entre théorie ergodique ponctuelle et théorie ergodique en moyenne. Tandis que cette dernière théorie se développait rapidement dans le cadre de l'analyse fonctionnelle, la théorie ponctuelle ne progressait que très lentement. La première généralisation du théorème de Birkhoff, due à E. Hopf, peut s'énoncer ainsi :

Théorème 2. (E. Hopf)[14] Avec les données et les hypothèses du théorème 1 et la donnée supplémentaire d'une fonction mesurable g, strictement positive (p.p.) et intégrable sur chaque ensemble mesurable de mesure finie, la suite des rapports

$$(2) \qquad \frac{\sum_{k=0}^{n} f \circ \Theta^k}{\sum_{k=0}^{n} g \circ \Theta^k}$$

converge (p.p.), sur l'ensemble $\Omega'$ des points pour lesquels la série $\sum_k g \circ \Theta^k$ est divergente, vers une fonction h invariante vis-à-vis de $\Theta$($h \circ \Theta = h$). En outre si g est intégrable sur $\Omega'$, on a

$$\int_{\Omega'} g\, h\, d\mu = \int_{\Omega'} f\, d\mu .$$

F. Riesz a donné, en 1946, une démonstration très élégante des théorèmes 1 et 2 basée sur le lemme suivant, dû à Yosida et Kakutani,

Lemme 1. (Maximal ergodic theorem)[21]

Avec les données et les hypothèses du théorème 1, l'ensemble mesurable $E = \{x \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} (\sum_{k=0}^{n} f(\Theta^k x)) > 0\}$ vérifie la relation

$$\int_E f\, d\mu \geq 0.$$

Les théorèmes obtenus par Hurewicz et Oxtoby entre 1944 et 1948 ne supposent plus que $\Theta$ conserve la mesure. Dans ces énoncés les termes de la forme $f \circ \Theta^k$ sont remplacés par $(f \circ \Theta^k)\omega_k$ où $\omega_k$ est le Jacobien de $\Theta^k$.[16][20]

C'est à la suite des travaux de Doob sur les processus de Markov que les expressions intervenant dans les énoncés ergodiques ont été considérées à un point de vue plus général. Si l'on observe que l'applica-

tion T qui, à f, fait correspondre $Tf = (f \circ \Theta)\omega_1$ est un endomorphisme de $\mathbb{L}^1(\Omega)$ qui possède les propriétés suivantes :

a) $f \geq 0 \Longrightarrow Tf \geq 0$ , autrement dit T est un endomorphisme positif,

b) $\int |Tf|\, d\mu = \int |f \circ \Theta|\, \omega_1\, d\mu = \int |f|\, d\mu$ ou encore

$$\|Tf\|_1 = \|f\|_1 \quad , \quad \text{donc} \quad \|T\|_1 = 1,$$

On est amené à étudier les limites des suites de la forme

$$(1') \qquad \frac{1}{n} \sum_{k=o}^{n-1} T^k f$$

ou

$$(2') \qquad \frac{\sum_{k=o}^{n} T^k f}{\sum_{k=o}^{n} T^k g}$$

T étant un endomorphisme positif de $\mathbb{L}^1$ satisfaisant à la condition $\|T\|_1 = 1$ et, plus généralement, à la condition $\|T\|_1 \leq 1$. Nous dirons pour abréger que T est une contraction de $\mathbb{L}^1(\Omega)$.

En 1954, E. Hopf, qui a apporté une importante contribution à la théorie ergodique, étendait, pour la suite (1') le théorème de Birkhoff en admettant l'existence d'un élément $g > 0$ et invariant sous T dans $\mathbb{L}^1(\Omega)$. Sa démonstration s'appuie sur le lemme qui s'énonce ainsi :

Lemme 2 (Hopf)[15]

Soit T une contraction de $\mathbb{L}^1(\Omega)$. Pour tout $f \in \mathbb{L}^1(\Omega)$ et tout entier n, on a

$$\int_E f\, d\mu \geq 0 \quad \text{si}$$

$$E = \{x \mid \sup_{j \leq n} \sum_{k=o}^{j} T^k f > 0\}$$

Deux ans après, N. Dunford et J.T. Schwartz, utilisant le même lemme et

un principe général de Banach, obtenaient une riche collection de théorèmes ergodiques pour des semi-groupes (à un nombre fini de paramètres) d'endomorphismes, pas nécessairement positifs, mais bornés dans $\mathbb{L}^1$ et dans $\mathbb{L}^\infty$ avec des normes au plus égales à 1. [11]

Suivant une conjecture de E. Hopf, Chacon et Ornstein établirent en 1960 un important théorème relatif à la suite (2'). Mentionnons aussi, sans les détailler, les travaux effectués par Chacon ces dernières années. [8] [9].

Aux problèmes de convergence qui sont au coeur de la théorie ergodique sont intimement liés les problèmes d'existence de mesures invariantes finies ou σ-finies sous certains opérateurs. L'existence d'une mesure finie ou σ-finie, équivalente à la mesure initiale et invariante sous une transformation mesurable et non singulière $\Theta$ est une question restée plus de quinze ans sans réponse. Dans le cas où l'on exige, dans ce dernier problème, que la mesure invariante cherchée soit finie, E. Hopf a montré en 1932 qu'il n'y a pas toujours de solution. Le résultat le plus remarquable a été obtenu assez récemment par Hajian et Kakutani qui ont prouvé qu'une telle mesure n'existe pas s'il y a au moins un ensemble E, mesurable et non négligeable, "faiblement errant" c'est à dire pour lequel il existe une suite croissante d'entiers $\{i_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (dite faiblement errante) telle que les ensembles $\Theta^{-i_n}(E)$ soient disjoints deux à deux. Y. Ito et surtout J. Neveu, en 1964, ont généralisé ce résultat au cas où l'on considère non plus une transformation ponctuelle $\Theta$, mais une contraction quelconque T. J. Neveu a démontré que

Théorème 3. (partiel) - Il existe un élément g dans $\mathbb{L}^1$, p.p. strictement positif et invariant par T si, et seulement si, il n'existe aucun h non nul dans $\mathbb{L}^\infty_+$ et aucune suite infinie croissante $(0 = n_o < n_1 < \ldots)$ dans $\mathbb{N}$ tels que

$$\sum_i (T^*)^{n_i} h < +\infty \qquad \text{(p.p)}$$

Dans le cas général où la mesure invariante peut être finie ou $\sigma$-finie, ce n'est qu'en 1960 qu'un contre-exemple construit par Ornstein [19] montra qu'il n'existe pas toujours de solutions. Signalons enfin l'important résultat, obtenu récemment par A. Ionescu Tulcea, selon lequel, en munissant l'ensemble des transformations $\theta$ sur $\Omega$ d'une topologie adéquate, les transformations admettant une mesure invariante vérifiant les conditions indiquées précédemment forment un ensemble de première catégorie. [22]

## CHAPITRE II

## UN LEMME ERGODIQUE ET SON APPLICATION A L'ETUDE D'UNE CONTRACTION DE $\mathbb{L}^1$ [4].

Nous supposerons dans ce chapitre et dans ceux qui suivent que l'on s'est donné une fois pour toutes un espace mesuré $\sigma$-fini $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ où $\Omega$ est l'espace de base, $\mathcal{A}$ la tribu des ensembles mesurables et $\mu$ la mesure. Suivant l'usage $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (resp. $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$) désigne l'ensemble des fonctions réelles et $\mu$-intégrables sur $\Omega$ (resp. des fonctions réelles et $\mu$-essentiellement bornées sur $\Omega$). Par passage au quotient suivant la relation d'équivalence définie par l'égalité presque partout on obtient à partir de $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (resp. $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$) l'espace de Banach réel $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (resp. $\mathbb{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$). Nous désignerons par la même lettre un élément $f$ de $\mathbb{L}^1$ et un représentant quelconque de $f$ dans $\mathcal{L}^1$, ce qui est licite puisque l'on ne considérera que des familles d'éléments au plus dénombrables à la fois.

Ce chapitre contient un lemme ergodique et son application au théorème de Chacon et Ornstein. De ces résultats sont déduits la décomposition de Hopf et l'identification de la limite intervenant dans le théorème ergodique. Le produit tensoriel de deux contractions permet de prouver un théorème ergodique relatif à certaines suites de puissances d'une contraction conservative. Nous prouvons enfin que le lemme d'Ackoglu qui généralise le nôtre en est une conséquence assez simple.

## § 1 - ENDOMORPHISMES POSITIFS DE $\mathbb{L}^1$ ET OPERATEURS ASSOCIES.

1. Rappelons d'abord certaines propriétés d'un endomorphisme positif T de $\mathbb{L}^1$ et de son transposé $T^*$ qui opère dans $\mathbb{L}^\infty$ . Nous donnons deux énoncés de propositions démontrées dans [N] .

Proposition II-1-1. (Propriété de continuité monotone)

Si T est un endomorphisme positif de $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, on a :

$$T(\lim_n f_n) = \lim_n (Tf_n),$$

pour toute suite croissante $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{L}^1_+(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, telle que $\lim_n f_n \in \mathbb{L}^1_+(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$,

$$\text{et } T^*(\lim_n h_n) = \lim_n (T^* h_n),$$

pour toute suite croissante $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{L}^\infty_+(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, telle que $\lim_n h_n \in \mathbb{L}^\infty_+(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Corollaire. Tout endomorphisme positif T(resp. $T^*$) de $\mathbb{L}^1$(resp. $\mathbb{L}^\infty$) se prolonge d'une seule manière en une application linéaire positive du cône $\mathcal{M}$ des fonctions mesurables positives finies ou non sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ dans lui-même, application qui possède aussi la propriété de continuité monotone. De plus ces prolongements sont tels que :

$$\int (Tf) \cdot g \cdot d\mu = \int f \cdot (T^* g)\, d\mu$$ pour tout couple f, g d'éléments de $\mathcal{M}$.

2. Contractions.

Définition. Un endomorphisme positif et borné de $\mathbb{L}^1$ (resp. $\mathbb{L}^\infty$ ) dont

la norme est au plus égale à 1 est une contraction de $\mathbb{L}^1$(resp. $\mathbb{L}^\infty$).

Il en résulte que la transposée d'une contraction de $\mathbb{L}^1$ est une contraction de $\mathbb{L}^\infty$.

Exemples :

a) Pour toute partie mesurable E de $\Omega$, d'indicateur $1_E$, l'application $f \longrightarrow 1_E.f$ est une contraction de $\mathbb{L}^1$ (resp. $\mathbb{L}^\infty$) que nous noterons $I_E$ (resp $I_E^*$).

b) Dans le chapitre I, a été construite la contraction induite par une transformation ponctuelle inversible de $\Omega$ .

Si T est un endomorphisme positif de $\mathbb{L}^1$, on voit sans peine que T est une contraction de $\mathbb{L}^1$ si, et seulement si, $T^*(1) \leq 1$ (où 1 désigne la fonction constante égale à 1 et sa classe d'équivalence dans $L^\infty$). Si $T^*1 = 1$, nous dirons que T est une contraction markovienne.

Soit S une contraction de $\mathbb{L}^\infty$ . Un élément h de $\mathbb{L}^\infty$ sera dit excessif pour S si $Sh \leq h$. Etant donné $\varphi \in \mathbb{L}^\infty+$, il existe dans l'ensemble des éléments excessifs pour S et majorant $\varphi$ un plus petit élément donné par la construction suivante :

Définissons une suite récurrente $\{\emptyset_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{L}^\infty+$ par les conditions :

$$\emptyset_0 = \varphi \quad , \qquad \emptyset_n = \varphi \vee S\,\emptyset_{n-1} \qquad (\text{pour } n \geq 1)$$

Cette suite est croissante et majorée par la fonction constante égale à $||\varphi||_\infty$. Nous désignerons sa limite dans $\mathbb{L}^\infty+$ par $\check{S}\varphi$ . D'après la proposition II-1-1, cette limite possède bien les propriétés voulues.

Dans le cas particulier où $\varphi$ est l'indicateur d'un ensemble mesurable E, on peut évaluer les termes $\phi_n$ et la limite $\check{S}(1_E)$ autrement. Pour tout $n \geq 1$, $||\phi_n||_\infty \leq 1$ et,

$$\phi_n = 1_E \vee S\,\phi_{n-1} = 1_E + S\phi_{n-1} - 1_E \cdot S\phi_{n-1} = 1_E + 1_{E^c} \cdot S\phi_{n-1}$$

où $E^c$ est le complémentaire de E. En désignant par $S_E$ l'endomorphisme composé $I^*_{E^c}$ o S, on obtient d'abord,

$$\phi_n = (I + S_E + \ldots + S_E^n)\,(1_E), \text{ puis,}$$

$$\check{S}(1_E) = I + S_E + \ldots + S_E^n + \ldots)\,(1_E).$$

Nous aurons besoin de l'opérateur $\lim_n (I + S_E + \ldots + S_E^n) = R_E$ dont le champ de définition est un sous-espace de $L^\infty$. La considération de cet opérateur qui a dans certains cas une signification probabiliste [N] et aussi en théorie du potentiel [M] nous a été suggérée par la construction suivante de Halmos. Supposons que $S\varphi(x) = \varphi(\theta x)$, où $\theta$ est une transformation mesurable et inversible de $\Omega$. On a alors :

$$S_E^n\, 1_E(x) = 1_{E^c}(x) \cdot 1_{E^c}(\theta x) \ldots 1_{E^c}(\theta^{n-1}x)\, 1_E(\theta^n x).$$

On voit immédiatement que $\check{S}(1_E)$ est, dans ce cas, l'indicateur de l'ensemble contenant E et tous les points x de $E^c$ dont un transformé $\theta^n x$ est dans E.

## § 2 - PRODUIT TENSORIEL DE DEUX CONTRACTIONS.

Soit $T_i (i = 1, 2)$ une contraction de $L^1(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$. Les fonctions de la forme

(1) $$g(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, g_{1,k}(x_1)\, g_{2,k}(x_2),$$ où les $g_{i;k}$, pour $i = 1, 2$ ; $k = 1, 2, \ldots, m$, sont des indicateurs d'ensembles mesurables

de mesures finies et les $\lambda_k$ sont des coefficients réels, constituent les éléments d'un sous-espace dense V de $\mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$. Faisons correspondre à une telle fonction g la fonction $g' = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k T_1(g_{1,k}) T_2(g_{2,k})$. Montrons tout d'abord que g' est négligeable si g est négligeable. Pour $\varphi_i \in \mathcal{L}^\infty(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ (i = 1, 2), on a

$$\iint g' \varphi_1 \varphi_2 \, d\mu_1 \, d\mu_2 = \iint g(T_1^* \varphi_1)(T_2^* \varphi_2) \, d\mu_1 \, d\mu_2 = 0$$

et ceci quel que soit le couple $(\varphi_1, \varphi_2)$. La classe d'équivalence de g' dans $\mathbb{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ ne dépend ainsi que de la classe d'équivalence de g dans $\mathbb{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. D'autre part si g est non négative elle admet au moins une représentation de la forme (1) où tous les coefficients $\lambda_k$ sont non négatifs (il suffit de se ramener au cas où les supports des $g_{i,k}$ (pour i = 1,2) définissent une partition de $\Omega_i$). Il en résulte que $g \geq 0$ (p.p.) $\Longrightarrow$ $g' \geq 0$ (p.p.). On a ainsi défini une application linéaire positive de V dans $\mathbb{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ et de plus

$$||g'||_1 = \iint \left[\sum_{k=1}^{m} \lambda_k T_1(g_{1,k}) \, T_2(g_{2,k})\right| d\mu_1 d\mu_2 \leq$$

$$\leq \iint \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_{1,k} \, g_{2,k}\right) d\mu_1 d\mu_2 = ||g||_1,$$

si les $\lambda_k$ sont non négatifs. Ceci montre que l'application $g \longrightarrow g'$

se prolonge d'une seule manière en une contraction de $\mathbb{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ que nous noterons $T_1 \otimes T_2$. En outre si $f \in \mathbb{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ est de la forme

$$f = \sum_{k=1}^{m} f_{1,k}\, f_{2,k} \quad \text{avec } f_{i,k} \in \mathbb{L}^1(\Omega_i) \text{ pour } i = 1,2,$$

on a $(T_1 \otimes T_2)(f) = \sum_{k=1}^{m} (T_1 f_{1,k})(T_2 f_{2,k})$. Pour vérifier ce résultat il suffit d'approcher dans $\mathbb{L}^1(\Omega_i)$ $(i = 1, 2)$ chaque fonction $f_{i,k}$ par une fonction simple $g_{i,K}$ et d'utiliser l'inégalité

$||T_i f_{i,k} - T_i g_{i,k}||_1 \leq ||f_{i,k} - g_{i,k}||_1$ vraie pour chaque couple (i,k).

On vérifie aussi immédiatement que toute fonction $\varphi \in \mathbb{L}^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$ de la forme $\varphi = \sum_{k=1}^{m} \varphi_{1,k}\, \varphi_{2,k}$, où $\varphi_{i,k} \in \mathbb{L}^\infty(\Omega_i)$ $(i = 1,2)$, a pour transformée par $(T_1 \otimes T_2)^*$

$$(T_1 \otimes T_2)^* \varphi = \sum_{k=1}^{m} (T_1^* \varphi_{1,k})(T_2^* \varphi_{2,k})$$

## § 3 - LEMME ERGODIQUE MAXIMAL ET THEOREME DE CHACON ET ORNSTEIN.

### 1. Lemme ergodique.

Etant donné une contraction T de $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, posons

$$T_{k,n} = T^k + T^{k+1} + \ldots + T^n$$

pour tout couple d'entiers k et n tels que $k \leq n$. A toute fonction $f \in \mathcal{L}^1$

on peut attacher l'ensemble mesurable $E_f$ défini comme suit :

$$E_f = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{x \mid T_{k,n} f(x) \geq 0\} .$$

La fonction $\overset{\vee}{T}{}^{*}(1_E)$ définie au § 2, n° 2 à partir d'un ensemble mesurable quelconque E sera ici désignée par $\Psi_E$ pour abréger. Nous allons établir le lemme suivant :

Lemme ergodique maximal : Pour tout élément f de $\mathbb{L}^1$ et toute partie mesurable E de $\Omega$ contenue dans $E_f$, on a :

$$\int f \Psi_E \, d\mu \geq 0$$

Démonstration.

Posons $e_n = E \cap \bigcap_{i=0}^{n} \{x \mid T_{i,n} f(x) \geq 0\}$ . On a la propriété :

$$x \in e_k \Longrightarrow \exists \ell \in \mathbb{N}, \quad \ell > n \text{ et } x \in e_\ell .$$

Il suffit de prendre pour $\ell$ le plus petit entier $h > k$ tel que $T_{k+1,h} f(x) \geq 0$. Il en résulte que E est la limite supérieure de la suite d'ensembles $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Soit alors $\varphi_{i,n}$ $(i \leq n)$ l'indicateur de l'ensemble $E_{i,n} = \bigcup_{k=i}^{n} e_k$ . Lorsque $n \longrightarrow \infty$ , $\varphi_{i,n} \uparrow 1_E$ quelque soit i.

Supposons maintenant n fixé et utilisons, pour simplifier, les notations $E_i$ et $\varphi_i$ en supprimant l'indice n. Construisons les fonctions $\psi_i \in \mathbb{L}^{\infty}+$ pour $0 \leq i \leq n$ de la façon suivante :

$$\psi_n = \varphi_n, \quad \psi_{n-1} = \varphi_{n-1} \vee T^* \varphi_n, \quad \ldots, \quad \psi_0 = \varphi_0 \vee T^* \psi_1,$$

On a donc : $\psi_n \leq \psi_{n-1} \leq \cdots \leq \psi_0$

Si l'on pose :

$$\Gamma_n = \psi_n, \quad \Gamma_{n-1} = \psi_{n-1} - T^* \psi_n, \quad \ldots, \quad \Gamma_0 = \psi_0 - T^* \psi_1,$$

On a

$$\psi_o = \Gamma_o + T^* \Gamma_1 + \ldots + T^{*n}\Gamma_n.$$

D'autre part les relations suivantes sont vérifiées sur l'ensemble $E_k - E_{k+1} \subset e_k$ $(0 \leq k < n)$.

$$\Gamma_{k+1} = \Gamma_{k+2} = \ldots = \Gamma_n = 0 \text{ et } \psi_o = \psi_1 = \ldots = \psi_k = 1$$

ce qui entraîne :

$$\Gamma_o \leq \Gamma_1 \leq \ldots \leq \Gamma_k.$$

Il en résulte que la fonction :

$$\Delta = \Gamma_o f + \Gamma_1 \cdot Tf + \ldots + \Gamma_n T^n f \text{ est positive ou nulle.}$$

En effet elle est nulle sur $E_o^c$ et, sur $E_k - E_{k+1}$, elle est égale à

$$\Gamma_o T_{o,k}(f) + (\Gamma_1 - \Gamma_o) T_{1,k}(f) + \ldots + (\Gamma_k - \Gamma_{k-1}) T_{k,k}(f)$$

et tous ces termes sont positifs ou nuls sur $E_k - E_{k+1}$. Donc

$$\int f \varphi_o \, d\mu = \int \Delta \, d\mu \geq 0$$

Faisons ensuite varier n.

$$\psi_o = \psi_{o,n} = \varphi_{o,n} \vee T^*(\varphi_{1,n} \vee T^*(\ldots \vee T^* \varphi_{n,n}))$$

et la suite $\psi_{o,n}$ croissante et bornée par $\psi_E$, tend vers $\psi_E$ lorsque $n \longrightarrow \infty$ puisque chaque terme $\varphi_{i,n}$ tend vers $1_E$ pour i fixé. On obtient donc

$$\int f \psi_E \, d\mu = \lim_n \int f . \psi_{o,n} \, d\mu \geq 0. \quad \blacksquare$$

Ajoutons que, pour tout entier k, $T^{*k} \psi_E \leq \psi_E$ ce qui résulte immédiatement de la construction donnée au § 1, n° 2.

2. Application au théorème ergodique de Chacon et Ornstein.[10]

Ce théorème s'énonce ainsi :

Théorème ergodique. Soit T une contraction de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Si g et h appartiennent à $L^1$ et h est non négatif, alors $\lim_n \frac{T_{o,n}(g)}{T_{o,n}(h)}$ existe et est finie p.p. sur l'ensemble A où $T^k h > 0$ pour un entier k au moins.

Démonstration. On peut se limiter au cas où $g \geq 0$. Posons

$$D_n(g, h) = \frac{T_{o,n}(g)}{T_{o,n}(h)},$$

Tout d'abord soit A' la partie de A sur laquelle $\overline{\lim_n} D_n(g, h) = +\infty$, A' est mesurable et, pour tout réel $c > 0$, $A' \subset E_{g-ch}$, donc, en appliquant le lemme ergodique,

$$\forall c \in \mathbb{R}^+, \quad \int \psi_{A'} (g - ch)\, d\mu \geq 0$$

On en déduit :

$$\int h \psi_{A'}\, d\mu = 0 \text{ et aussi } \int T^k h\, \psi_{A'}\, d\mu = \int h\, T^{*k} \psi_{A'}\, d\mu = 0,$$

puisque $0 \leq h\, T^{*k} \psi_{A'} \leq h \psi_{A'}$, d'après la remarque faite à la fin du précédent numéro. Or $1_{A'} \leq \psi_{A'}$ et par conséquent A' est négligeable. Supposons ensuite que $D_n(g, h)$ n'ait pas de limite sur la partie A" de A. A" est mesurable et si A" n'est pas négligeable, il existe deux réels a et b et un ensemble mesurable et non négligeable $E \subset A"$, tels que, sur E

$$\underline{\lim_n} D_n(g, h) < a < b < \overline{\lim_n} D_n(g, h)$$

Sur E, on a aussi

$$\lim_n T_{o,n}(g) = \lim_n T_{o,n}(h) = +\infty$$

Donc

$$E \subset E_{ah-g} \cap E_{g-bh},$$

et, par application du lemme ergodique,

$$\int \Psi_E (ah - g)\, d\mu \geq 0 \quad \text{et} \int \Psi_E (g - bh)\, d\mu \geq 0$$

ce qui entraîne

$$(a - b) \int \Psi_E\, h\, d\mu \geq 0, \text{ donc} \int \Psi_E\, h\, d\mu = 0$$

Comme plus haut, on en déduit $\int \Psi_E\, T^k h\, d\mu = 0$ pour tout entier k.

Or ce résultat est contraire à l'hypothèse $\mu(E) > 0$. ■

## § 4 - DECOMPOSITION DE HOPF - CONTRACTIONS CONSERVATIVES ET OPERATEURS D-REGULIERS.

1. Soit $f_o$ un élément fixé dans $\mathbb{L}^1_+$ tel que $\Omega = \{f_o > 0\}$ .

Etant donné la contraction T de $\mathbb{L}^1$, considérons la partition de $\Omega$ en deux sous-ensembles C et D mesurables :

$$C = \{\lim_n T_{o,n}(f_o) = +\infty\}$$

$$D = \{\lim_n T_{o,n}(f_o) < +\infty\}$$

Définition. L'ensemble C est appelé partie conservative de $\Omega$ pour T et l'ensemble D, partie dissipative de $\Omega$ pour T.

Nous allons voir que le choix de $f_o$ n'intervient pas lorsque l'on considère C et D comme étant définis à un ensemble négligeable près. Ceci résulte de la

Proposition II-4-1. Pour tout $f \in \mathcal{L}^1_+$,

$$\lim_n (T_{o,n} f) = 0 \text{ ou } +\infty \text{ , p.p. sur C,}$$

$$\lim_n (T_{o,n} f) < +\infty \text{ p.p. sur D.}$$

Démonstration. Sur C, $\frac{T_{o,n}(f_o)}{T_{o,n}(f)}$ a une limite finie p.p. sur l'ensemble $\{\sup T_{o,n} f > 0\}$. Le reste est évident. ■

Lemme II-4-1.

Pour tout $f \in \mathbb{L}^1+$ telle que $\{f > 0\} \subset C$ on a aussi $\{T^n f > 0\} \subset C$.

Pour tout $\varphi \in \mathbb{L}^\infty+$ telle que $\{\varphi > 0\} \subset D$ on a aussi $\{T^{*n}\varphi > 0\} \subset D$.

pour tout entier n, les inclusions étant prises aux ensembles négligeables près.

Démonstration. Pour tout $\lambda$ réel > 0, $\lambda f \leq \sum_{k=0}^{+\infty} T^k f_o$ donc $\lambda T^n f \leq \sum_{k=0}^{+\infty} T^k f_o$ et le deuxième terme est fini sur D, donc $T^n f$ est (p.p) nulle sur D. L'autre partie du lemme se déduit de la première partie par dualité ; si $f'_o$ est la restriction de $f_o$ à C et si $\{\varphi > 0\} \subset D$, on peut écrire :

$$\int f'_o \cdot T^{*k}\varphi \, d\mu = \int T^k f'_o \cdot \varphi \cdot d\mu = 0 \text{ donc } T^{*k}\varphi = 0 \text{ p.p. sur C.}$$ ■

Une conséquence de ce qui précède est que l'opérateur $T_D = T \circ I_C$ est une contraction de $\mathbb{L}^1(C, \mathcal{C} \cap \mathcal{A}, \mu_c)$. La contraction transposée $T_D^* = I_C^* \circ T^*$ jouit de la propriété suivante :

Lemme II-4-2. Si $h \in \mathbb{L}^\infty(C)$ est excessif pour $T_D^*$, alors $T_D^* h = h$.

Démonstration : Posons $\varphi = h - T_D^* h$. Alors $R_D^* \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} T_D^{*k}\varphi \leq 2||h||_\infty$ et $+\infty > \int R_D^*\varphi \cdot f'_o \, d\mu_c = \int R_D f'_o \cdot \varphi \, d\mu_c$ où $R_D f'_o = \sum_{k=0}^{\infty} T^k f'_o = +\infty$ sur C, donc $\varphi$ est nul.

En particulier $T_D^*(1_C) = 1_C$. ■

2. Définition. La contraction T de $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est dite conservative si la partie dissipative de $\Omega$ pour T est négligeable.

Proposition II-4-2. La contraction T est conservative si, et seulement si, pour tout $\varphi \in \mathbb{L}^\infty_+$ on a $\sum_{k=0}^{+\infty} T^{*k}\varphi = 0$ ou $+\infty$ (p.p.).

Démonstration.

Soit A un ensemble mesurable sur lequel $\sum_{k=0}^{n} T^{*k}\varphi$ est bornée. Alors $\int_A f_\circ \sum_{k=0}^{\infty} T^{*k}\varphi \, d\mu < +\infty$ et ceci peut s'écrire $\int \varphi \sum_{k=0}^{+\infty} T^k(1_A f_\circ)d\mu < +\infty$. Si T est conservative, cette intégrale est nécessairement nulle, et sur A, $\sum_{k=0}^{\infty} T^{*k}\varphi = 0$ (p.p.).

Réciproquement, soit $f \in \mathbb{L}^1_+$ et $A \in \mathcal{A}$, non négligeable, sur lequel $\sum_{k=0}^{+\infty} T^k f \neq 0$ et $+\infty$. Il existe alors une partie mesurable et non négligeable E de A, sur laquelle $\sum_{k=0}^{+\infty} T^k f$ est intégrable,

$$0 < \int_E (\sum_{k=0}^{+\infty} T^k f)d\mu = \int f \sum_{k=0}^{+\infty} T^{*k}(1_E)d\mu < +\infty ,$$

et la condition de l'énoncé n'est pas satisfaite pour $1_E$. ■

Ces résultats montrent que $T_D$ est une contraction conservative de $\mathbb{L}^1(C)$. On appelle $T_D$ la partie conservative de T.

Proposition II-4-3. Etant donné une contraction conservative T, les éléments $h \in \mathbb{L}^\infty$ tels que $h = Th$ forment un sous-espace vectoriel Z de $\mathbb{L}^\infty$ stable vis-à vis des opérations V et $\wedge$. Ce sous-espace Z contient les fonctions constantes et si $h_n$ est une suite croissante dans Z telle que $\lim_n h_n \in \mathbb{L}^\infty$, alors $\lim_n h_n \in Z$.

Démonstration. Z est le noyau de l'endomorphisme $I - T^*$ de $\mathbb{L}^\infty$ donc est un sous-espace. Si $h_1$ et $h_2 \in Z$, $T^*(h_1 \wedge h_2) \leq h_1 \wedge h_2$ donc l'égalité a lieu (lemme II-4-2). On a aussi $T^*(h_1 \vee h_2) = h_1 + h_2 - h_1 \wedge h_2 = h_1 \vee h_2$.

Si $Z \ni h_n \uparrow h \in \mathbb{L}^\infty$ , $T^* h = \lim_n T^* h_n = \lim_n h_n = h$ et $h \in Z$.
Enfin si h est constante $T^* h = h$.

Les éléments de Z sont dits invariants sous $T^*$. Les parties E de $\Omega$ , telles que $1_E \in Z$ appartiennent à une sous-tribu $\mathcal{J}$ de $\mathcal{A}$ dont les éléments sont appelés ensembles invariants. Enfin un résultat classique de la théorie de la mesure permet d'affirmer que Z est l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions $\mathcal{J}$-mesurables.

Lemme II-4-3. Soit E un sous-ensemble mesurable de la partie conservative C de $\Omega$ pour la contraction T. Il existe alors un ensemble $\hat{E}$ et un seul (à une équivalence près) tel que $\hat{E}$ soit une partie de C, invariante pour $T_D^*$ , et que $1_{\hat{E}} = 1_C \Psi_E$. En outre $\Psi_E = T^* \Psi_E = R_C^* (1_{\hat{E}})$.

Démonstration.

D'après la construction de $\Psi_E = \check{T}^*(1_E)$ (§ 2, n° 1) on peut écrire $\Psi_E = 1_E \vee T^* \Psi_E$ ce qui montre que $\Psi_E = T^* \Psi_E$ sur le complémentaire de E. On a aussi $T^* \Psi_E \leq \Psi_E$ d'où l'on tire :

$$T_D^* (1_C \Psi_E) \leq 1_C \Psi_E$$

ce qui entraîne que $1_C \Psi_E$ est invariant sous $T_D^*$ . Posons $\hat{E} = \{1_C \Psi_E = 1\}$ . $\hat{E}$ est $T_D^*$-invariant et contient E. On en déduit :

$1_E \leq 1_{\hat{E}} \leq \Psi_E$, $\Psi_E = \check{T}^*(1_E) \leq \check{T}^*(1_{\hat{E}}) \leq \Psi_E$,

et, en multipliant par $1_C$,

$1_C \Psi_E \leq 1_{\hat{E}} = \check{T}_D^*(1_{\hat{E}}) = 1_C \check{T}^*(1_E) \leq 1_C \Psi_E$.

On a, pour finir, $1_{\hat{E}} = 1_C \Psi_E = (I - T_C^*)(\Psi_E)$ d'où $\Psi_E = R_C^* (1_{\hat{E}})$. ■

$\hat{E}$ est le plus petit ensemble, $T_D^*$-invariant et contenant E (à une équivalence près). De plus si T est conservative, $\varphi$ $\mathcal{J}$-mesurable et $0 \leq \varphi \leq 1$, on a $(1 - \varphi) 1_{\hat{E}} \geq \check{T}^*(1 - \varphi) 1_E \geq 1_{\hat{E}} - \check{T}^*(\varphi 1_E)$, donc $\varphi 1_{\hat{E}} \leq \check{T}^*(\varphi 1_E)$ et par consé-

quent $\varphi 1_{\hat{E}} = \overset{\vee}{T}^{*}(\varphi 1_E)$. En particulier $Y \in \mathcal{J}$ et $Y \subset \hat{E}$ entraînent que $Y = \widehat{Y \cap E}$.

3. Opérateurs D-réguliers

Soit P un endomorphisme positif et borné de $\mathbb{L}^1$, non nul ($||P||_1 > 0$). Associons à P la contraction $\frac{1}{||P||_1} P$ et posons la définition suivante :

Définition. L'endomorphisme positif et borné P de $\mathbb{L}^1$ est appelé un opérateur D-régulier si la contraction $\frac{1}{||P||_1} P$ est conservative.

Exemples.

a) Si T est une contraction conservative et les $a_i$ (i=0,1,...,k) des réels positifs non tous nuls, l'opérateur $P = a_0 I + a_1 T + \ldots + a_k T^k$ est D-régulier. En effet, on voit tout d'abord que $||P||_1 = a_0 + a_1 + \ldots + a_K$ et, en posant $\alpha_i = \frac{a_i}{a_0 + a_1 + \ldots + a_K}$ (pour i = 0,1,..., k), on peut écrire $P' = \frac{1}{||P||_1} P = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i T^i$. L'inégalité $P'^{*}\varphi \leq \varphi$ pour un $\varphi \in \mathbb{L}^\infty$ s'écrit aussi $(I - T^*)(\beta_0 \varphi + \beta_1 T^*\varphi + \ldots + \beta_{K-1} T^{*k-1}\varphi) \geq 0$, les coefficients $\beta_i$ étant égaux à

$$\beta_0 = I - \alpha_0 \,, \quad \beta_1 = 1 - \alpha_0 - \alpha_1, \ \ldots \ , \quad \beta_{k-1} = 1 - \alpha_0 \ldots \alpha_{k-1} = \alpha_k .$$

Ces coefficients étant positifs ou nuls et puisque T est conservative, on déduit de ce qui précède que $\varphi = P'^{*}\varphi$.

b) Même démonstration pour un opérateur P de la forme : $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k$ où la série, à termes positifs ou nuls $a_K$, a une somme > 0, en supposant de plus que la série numerique $\sum_{n>0} \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$ soit elle aussi convergente. Il n'en est plus de même pour une série $a_k$ positive et convergente quelconque.

c) Soit P un endomorphisme positif et borné de $\mathbb{L}^1$ tel qu'il existe

$f \in \mathbb{L}^1$, $f \neq 0$ (p.p.) et $Pf = ||P||_1 \cdot f$. Alors P est D-régulier.

En effet, posons $P' = \frac{1}{||P||_1} P$. Si $f = f^+ - f^-$, $P'f^+ - P'f^- = f^+ - f^-$ donc $P'f^+ \geq f^+$ et $P'f^- \geq f^-$ ce qui entraîne, puisque P' est une contraction $P'f^+ = f^+$ et $P'f^- = f^-$, donc $P'(|f|) = |f|$ et $|f| > 0$ (p.p.).

Si l'on suppose pour $\varphi \in \mathbb{L}^\infty$, $P'^*\varphi \leq \varphi$, on obtient :

$0 \leq \int |f| \ (\varphi - P'^*\varphi) d\mu = \int [|f| - P'(|f|)]\varphi \, d\mu = 0$, d'où l'on tire $\varphi = P'^*\varphi$ .

## § 5 - IDENTIFICATION DE LA LIMITE INTERVENANT DANS LE THEOREME DE CHACON ET ORNSTEIN (voir [N] et [M] ).

### 1. Cas d'une contraction conservative T.

Nous allons prouver le résultat suivant du à Chacon :

Théorème. Etant donné g et h satisfaisant aux hypothèses du théorème (C-O) (II-3-n° 2), on a, sur l'ensemble $\{\sup T^n h > 0\}$, l'égalité

$$\lim_n D_n(g, h) = \frac{E^{\mathcal{J}}(g)}{E^{\mathcal{J}}(h)} \quad \text{(p.p.)}$$

$E^{\mathcal{J}}$ étant l'opérateur d'espérance conditionnelle relatif à la sous-tribu $\mathcal{J}$ des ensembles invariants.

Démonstration. On peut remplacer l'ensemble qui figure dans l'énoncé par l'ensemble $A = \{\sum_{k=0}^{\infty} T^k h = +\infty\}$ puisque T est conservative. On a ensuite $\int T^*(1_{A^c}) \ (\sum_{k=0}^{+\infty} T^k h) d\mu = \int 1_{A^c} \ (\sum_{k=1}^{+\infty} T^k h) d\mu = 0$, donc $T^*(1_{A^c}) \leq 1_{A^c}$ et ainsi $A \in \mathcal{J}$ ($\mathcal{J}$ a été définie à la suite de la prop. II-4-3). Soit maintenant X la partie de A sur laquelle $\lim_n D_n(g, h) \leq a$ et $Y = \hat{Y}$ une partie invariante de $\hat{X}$. D'après la remarque faite à la fin du n° 2 § 4, on peut écrire $Y = X \hat{\cap} Y$. En appliquant le lemme ergodique maximal on obtient :

$0 \leq \int_{Y \cap X} (ah - g)d\mu = \int 1_Y(ah - g)\, d\mu = \int 1_Y(a\, E^{\mathcal{J}}(h) - E^{\mathcal{J}}(g))d\mu_{\mathcal{J}}$,

la dernière égalité ayant lieu en vertu de la définition de l'espérance conditionnelle et parce que $Y \in \mathcal{J}$ . On en déduit que, sur $\hat{X}$, la fonction $\mathcal{J}$ -mesurable $\frac{E^{\mathcal{J}}(g)}{E^{\mathcal{J}}(h)}$ est au plus égale à $\alpha$ . Cette conclusion étant vraie pour tout réel $\alpha$ et aussi pour l'inégalité $\lim_n D_n(g, h) \geq \alpha$, le théorème est ainsi démontré. ■

2. Cas d'une contraction T quelconque.

Rappelons la définition de l'opérateur $R_C$, où C est la partie conservative de $\mathcal{A}$ pour T, soit $R_C = \sum_{k=0}^{\infty} T_C^{\,k}$ avec $T_C = T \circ I_D$.

Nous allons établir le résultat suivant, dû aussi à Chacon,

Théorème. Etant donné g et h satisfaisant aux hypothèses du théorème (C-O) on a, sur l'ensemble $C \cap \{\mathrm{Sup}\, T^n h > 0\}$ :

$$\lim_n D_n(g, h) = \frac{E^{\mathcal{J}}(1_C\, R_C\, g)}{E^{\mathcal{J}}(1_C\, R_C\, h)} \quad (p.p)$$

$\mathcal{J}$ désignant la sous-tribu de $C \cap \mathcal{A}$ constituée par les ensembles invariants sous $T_D^*$ . (Voir aussi [N] et [M] ).

Démonstration. Supposons $g \in \mathbb{L}^1_+$ et posons $g' = 1_C\, R_C(g)$.

Pour déduire le résultat cherché du théorème précédent il suffit de voir que $\lim_n D_n(g, g') = 1$ (p.p) sur les ensembles $C \cap \{T^k g > 0\}$ et $C \cap \{T^k g' > 0\}$ . Pour cela il faut prouver que les ensembles :

$$C \cap \{T^k g \text{ (ou } T^k g') > 0\} \cap \{\lim_n D_n(g, g') \leq 1 - \varepsilon \text{ (ou } \geq 1 + \varepsilon)\}$$

sont négligeables pour tout $\varepsilon > 0$.

Soit par exemple $E = C \cap \{T^k g' > 0\} \cap \{\lim_n D_n(g, g') \leq 1 - \varepsilon\}$.

Par application du lemme ergodique maximal et en remplaçant g(resp. g') par $T^k g$(resp. $T^k g'$) ce qui est licite puisque $E \subset \mathcal{C}$, on obtient :

$$\int \Psi_E [(1 - \varepsilon)\, T^k g' - T^k g]\, d\mu \geq 0.$$

Or nous allons voir que pour toute partie mesurable X de C, on a :

$\int \Psi_X\, T^k g'\, d\mu = \int \Psi_X\, T^k g\, d\mu$ , ce qui entraîne

$-\varepsilon \int \Psi_E\, T^k g'\, d\mu \geq 0$ donc $\Psi_E$ et à fortiori $1_E$ sont négligeables.

Il reste à vérifier le ■

Lemme II-4-4. Pour tout entier k et toute partie mesurable X de C, on a :

$$\int \Psi_X\, T^k g\, d\mu = \int \Psi_X\, T^k g'\, d\mu .$$

Démonstration. Le lemme II-4-3 nous permet d'écrire :

$$\int \Psi_X\, T^k g'\, d\mu = \int \Psi_X\, g'\, d\mu = \int 1_{\hat{X}}\, \mathcal{R}_C(g)\, d\mu = \int \mathcal{R}_C^*(1_{\hat{X}})\, g\, d\mu = \int \Psi_X g\, d\mu = \int \Psi_X\, T^k g\, d\mu$$ ■

## § 6 - THEOREME ERGODIQUE POUR CERTAINES SUITES DE PUISSANCES D'UNE CONTRACTION CONSERVATIVE.

Soit d'une part T une contraction conservative de $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, d'autre part S la contraction induite par la transformation $t \longrightarrow t + \alpha$ ($\alpha$, constante > 0) définie sur le cercle unité $\Omega'$ muni de la mesure m de Lebesgue. On suppose $\frac{\alpha}{\pi}$ irrationnel.(1) Donnons-nous sur $\Omega'$ un arc $(\mathcal{a})$ non nul et un point fixe $t_0$ de $\Omega'$. On peut alors définir une suite croissante d'entiers $\{n_j\}_{j \in N}$ de la façon suivante :

$n_0$ est le plus petit entier k tel que $1_{(\mathcal{a})}(t_0 + k\alpha) = 1$.

(1) On se place dans le cas où les fonctions invariantes par $(T \otimes S)^*$ sont de la forme $h \otimes 1$ où h est invariante par $T^*$.

Si $n_1, n_2, \ldots, n_{j-1}$ sont construits on pose

$n_j$ = le plus petit entier $k > n_{j-1}$ tel que $1_{(a)}(t_\circ + k\alpha) = 1$.

Ceci étant posé nous allons établir le théorème suivant :

Théorème : Soit $f \in \mathbb{L}^1_+(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. On a presque partout sur l'ensemble

$$\{\sup_k T^k f > 0\}, \quad \lim_{m\to\infty}\left(\frac{\sum_{j=0}^{m} T^{n_j} f}{\sum_{k=0}^{n_m} T^k f}\right) = \frac{m(a)}{2\pi}$$

Démonstration. Commençons par choisir deux arcs (b) et (c) sur $\Omega'$ de telle sorte que $(a)$ soit un voisinage de (b) et (c) un voisinage de $(a)$ et observons que, ces arcs étant choisis, il existe un voisinage $W$ de $t_\circ$ sur $\mathbb{R}$ satisfaisant à la condition suivante :

(1) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in W ; \; 1_{(b)}(t + n\alpha) \leq 1_{(a)}(t_\circ + n\alpha) \leq 1_{(c)}(t + n\alpha)$.

Appliquons ensuite le théorème (C-O) à la contraction $T \otimes S$ et aux éléments $f \otimes 1_{(b)}$ et $f \otimes 1$. Il existe donc une partie négligeable $\mathcal{N}_{(b)}$ de $\Omega \times \Omega'$ telle que pour tout couple $(x, t) \in \Omega \times \Omega'$ satisfaisant aux conditions : $(x, t) \notin \mathcal{N}_{(b)}$ et $x \in \{\sup_p (T^p f) > 0\}$

$$\lim_n \frac{\sum_{p=0}^{n} T^p f(x)\, 1_{(b)}(t + p\alpha)}{\sum_{p=0}^{n} T^p f(x)} \text{ existe et soit finie.}$$

Il existe alors une partie négligeable $\mathcal{N}$ de $\Omega$ telles que pour $x \notin \mathcal{N}$, les x-sections des ensembles $\mathcal{N}_{(b)}$ et $\mathcal{N}_{(c)}$ soient négligeables. Il

est ainsi possible de choisir un élément t de W associé à x pour que les limites

$$\lim_n \frac{\sum_{p=0}^{n} T^p f(x)\, 1_{(b)}(t + p\alpha)}{\sum_{p=0}^{n} T^p f(x)} \quad \text{et} \quad \lim_n \frac{\sum_{p=0}^{n} T^p f(x)\, 1_{(c)}(t + p\alpha)}{\sum_{p=0}^{n} T^p f(x)}$$

existent et soient finies. En vertu des conditions (1) nous pourrons en déduire l'existence de la limite du rapport

$$(2) \qquad \frac{\sum_{j=0}^{m} T^{n_j} f}{\sum_{k=0}^{n_m} T^k f} \qquad \text{quand } m \longrightarrow +\infty$$

à condition de pouvoir démontrer que les deux limites précédentes sont aussi voisines qu'on le veut lorsqu'on choisit convenablement les voisinages (b) et (c). Pour cela considérons une double suite d'arcs $(b_i)$ et $(c_i)$ qui tendent vers a et remplaçons $\mathcal{N}$ par la réunion dénombrable des parties $\mathcal{N}_i$ associées comme plus haut à chaque couple $(b_i)$, $(c_i)$. La démonstration sera achevée par le lemme suivant :

Lemme II-6-1. Si T est conservative et S définie comme au début du § 6, la contraction $T \otimes S$ est aussi conservative.

Démonstration. Soit $\phi \in \mathbb{L}^{\infty}_{+}(\Omega \times \Omega')$ telle que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (T \otimes S)^{*n} \phi \in \mathbb{L}^{\infty}_{+}(\Omega \times \Omega')$$

et prenons $f_0 \in \mathbb{L}^1_{+}(\Omega)$ de telle sorte que $\Omega = \{f_0 > 0\}$. On a

$$+\infty > \iint (f_0 \otimes 1) \sum_{n=0}^{\infty} (T \otimes S)^{*n} \phi \, d\mu(x)\, dm(t) = \iint \phi(x, t) \Big(\sum_{n=0}^{\infty} T^n f_0(x)\Big) d\mu(x) dm(t)$$

car $S(1) = 1$. Puisque T est conservative les deux intégrales sont nécessairement nulles et $\emptyset$ est négligeable. ■

Il est bon d'ajouter que dans le cas général le produit tensoriel de deux contractions conservatives n'est pas conservatif.

On voit aussi aisément que la limite de (2) sur l'ensemble où elle existe est (p.p) égale à la constante $\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega'} 1_{(a)}(t)\, dm(t)$ ce qui complète la démonstration du théorème.

## § 7 - LE LEMME ERGODIQUE D'AKCOGLU

Avec les mêmes notations que celles utilisées en (II-3-n° 1) et étant donné $f \in \mathbb{L}^1$, posons, avec Akcoglu,

$$E'_f = \{\overline{\lim_n}\ (f + Tf + \ldots + T^n f) \geq 0\}\ .$$

Le lemme d'Ackoglu qui généralise le nôtre puisque $E'_f \supset E_f$, affirme que :

$$\forall E \text{ mesurable},\ E \subset E'_f \Longrightarrow \int \varphi_E\, f\, d\mu \geq 0.$$

Nous nous proposons de montrer que ce dernier lemme peut se déduire assez simplement du nôtre.

Soit C( resp. D) la partie conservative (resp. dissipative) de $\Omega$ pour T.

Posons $E_1 = E \cap C$ et $E_2 = E \cap D$.

Etant donné $f_0 \in \mathbb{L}^1_+$ avec $\Omega = \{f_0 > 0\}$, les conditions d'application du lemme ergodique sont bien remplies sur $E_1$ pour la fonction $f + \varepsilon f_0$ pour tout $\varepsilon > 0$, puisque $\overline{\lim_n}\ (I + T + \ldots + T^n)(f + \varepsilon f_0) = +\infty$ sur $E_1$.

Donc $\int \psi_{E_1} (f + \varepsilon f_o)\, d\mu \geq 0$, et en faisant tendre $\varepsilon$ vers 0, on obtient $\int \psi_{E_1} f\, d\mu \geq 0$. D'autre part $\psi_{E_1} + \psi_{E_2}$ est excessive pour T et supérieure à $1_E$, donc $\psi_E \leq \psi_{E_1} + \psi_{E_2}$. Mais $1_c\, \psi_{E_2} = 0$ (p.p.) et il s'ensuit que $\psi_E - \psi_{E_1}$ est nulle (p.p.) sur C.

Supposons d'abord que $\sum_{n=0}^{\infty} T^n f_o$, finie (p.p.) sur D, soit intégrable sur $E_2$ et posons $\chi = (I - T^*)\psi_E = (I - T^*)(\psi_E - \psi_{E_1})$. On peut écrire :

$$\psi_E - \psi_{E_1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^{*n}\chi \quad \text{car } T^{*n}(\psi_E - \psi_{E_1}) \leq T^{*n}(\psi_{E_2}) \text{ et}$$

$\lim_n (T^{*n}\psi_{E_2}) = 0$ (p.p.

On a ensuite

$$\lim_n \int \chi \left(\sum_{k=0}^{n} T^k f\right) d\mu = \lim_n \int (\psi_E - \psi_{E_1})(f - T^{n+1} f)\, d\mu = \int (\psi_E - \psi_{E_1}) f\, d\mu .$$

Or le premier membre est non négatif puisque $\chi$ est nulle sur $E_2^c$. On a ainsi prouvé que $\int \psi_E f\, d\mu \geq 0$.

Si maintenant $E_2$ ne vérifie plus la condition d'intégrabilité supposée plus haut, il existe une suite croissante d'ensembles mesurables $\{E_2^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ qui la vérifient et dont la limite est $E_2$. La suite des ensembles $E^m = E_1 \cup E_2^m$ a pour limite E et l'on a aussi $\lim_m (\psi_{E^m}) = \psi_E$ (p.p.)
Nous avons bien

$$\int \psi_E f\, d\mu = \lim_m \int \psi_{E_m} f\, d\mu \geq 0$$

On peut d'ailleurs envisager une autre extension de l'ensemble $E_f$.

Posons en effet :

$$E''_f = \left(\left\{\overline{\lim_n} (I + T + \ldots + T^n) f > -\infty\right\} \cap C\right) \cup \left(\left\{\lim_n (I + T + \ldots + T^n) f \geq 0\right\} \cap D\right)$$

$E'_f$ est contenu dans $E''_f$ et il aisé de voir que l'on a toujours

$$E \subset E''_f \Longrightarrow \int \varphi_E \, f \, d\mu \geq 0$$

Pour le premier terme de la réunion définissant $E''_f$ le même raisonnement que plus haut s'applique aux fonctions $f + \varepsilon f_0$ ($\varepsilon > 0$). Pour le deuxième terme il n'y a rien à changer.

Comparaison des ensembles $E_f$, $E'_f$ et $E''_f$ sur un cas particulier.

$\Omega$ est le tore à une dimension $\mathbb{R}/(\mathbb{Z})$. Soit S la contraction de $\mathbb{L}^1(\Omega)$ définie par $Sf(x) = f(x + \frac{1}{2})$ pour $f \in \mathbb{L}^1(\Omega)$ et $x \in \Omega$. Considérons la contraction $T = e^{-1} e^{S}$ et soit g la fonctionégale à 1 sur l'ensemble $\Omega_1 = [0, \frac{1}{2}[$ et égale à -1 sur le complémentaire $\Omega_2$ de $\Omega_1$.

On a, pour tout entier n

$$T^n g = e^{-n} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{n^p}{p!} S^p g\right).$$

Donc $T^n g = e^{-2n}$ sur $\Omega_1$ et $-e^{-2n}$ sur $\Omega_2$. Ainsi

$$\sum_{n=0}^{\infty} T^n g = \frac{1}{1-e^{-2}} \text{ sur } \Omega_1 \text{ et } -\frac{1}{1-e^{-2}} \text{ sur } \Omega_2,$$

d'où l'on tire

$$E_g = E'_g = \Omega_1 \quad \text{et} \quad E''_g = \Omega.$$

T est évidemment conservative puisque $T(1) = 1$.

## CHAPITRE III

## SUITES m-FAIBLEMENT ERRANTES

Comme nous l'avons indiqué sommairement dans l'introduction, le problème d'existence d'une mesure invariante finie, équivalente à la mesure initiale, sous une transformation ponctuelle, non singulière $\theta$, se ramène à la résolution de l'équation fonctionnelle $f(\theta x)\omega(x) = f(x)$ (p.p.) ($\omega$ est le Jacobien de $\theta$). Il faut ajouter les conditions :

1) f est presque partout positive,

2) $f \in L^1$ puisque la mesure invariante doit être finie.

L'équation fonctionnelle peut s'écrire plus simplement $Tf = f$, T étant la contraction de $L^1$ induite par $\theta$. Sous cette forme le problème se pose de façon plus générale pour une contraction quelconque T.

Hajian et Katutani[13] dans le cas des transformations, Ito[14] et surtout J. Neveu[18] dans le cas général ont obtenu diverses conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème ait une solution et certaines de ces conditions font intervenir des ensembles dits faiblement errants et des suites croissantes d'entiers dites faiblement errantes. Nous allons prouver ici que les résultats de J. Neveu restent valables lorsqu'on substitue aux suites d'entiers considérées par cet auteur des suites que nous avons appelées m-faiblement errantes. L'intérêt de cette notion est qu'elle étend de façon plus proche la notion correspondante introduite par Hajian et Kakutani dans le cas d'une contraction admettant pour inverse une contraction. Nous prouverons aussi que la densité d'une suite (m.f.e) est nulle.

Dans ce qui va suivre nous supposerons la mesure initiale $\mu$ finie, ce qui ne restreint pas la généralité.

## § 1 - SUITES m-FAIBLEMENT ERRANTES.

1 - Observons tout d'abord que si $f \in \mathbb{L}^1_+$ ($f > 0$ (p.p.)) est solution de l'équation $f = Tf$, T est conservative (II-4-n° 3, ex c)) et si l'on suppose seulement $Tf = f \in \mathbb{L}^1_+$, l'ensemble $\{f > 0\}$ est contenu dans la partie conservative C de $\Omega$ pour T. On a aussi

$$f = 1_C f = T(1_C f) = T_D(f).$$

On peut donc se borner à étudier le cas d'une contraction conservative T. Désormais cette condition sera supposée remplie.

Supposons maintenant qu'il existe h non nul dans $\mathbb{L}^\infty_+$ tel que :

$$\varliminf_n \int T^{*n} h \cdot d\mu = 0 \tag{1}$$

Pour tout $f \in \mathbb{L}^1_+$, on a aussi $\varliminf_n \int f \cdot T^{*n} h \cdot d\mu = 0$ [18].

Donnons-nous une suite strictement positive $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ telle que le produit $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \varepsilon_n)$ existe et soit égal à $1 + b$. Il existe, d'après (1), un entier $k_1 > 0$ tel que

$$(I + T^{*k_1})h \, d\mu \leq (1 + \varepsilon_1) \int h \, d\mu .$$

En appliquant la remarque suivant (1), on déduit l'existence d'un entier $k_2 > 0$ tel que

$$\int (I + T^{*k_1})(I + T^{*k_2})h \, d\mu \leq (1 + \varepsilon_2) \int (I + T^{*k_1})h \, d\mu .$$

Ce procédé, indéfiniment itéré conduit à la formation d'une suite d'entiers $k_1, k_2, \ldots$ tels que

$$\lim_n (I + T^{*k_1})(I + T^{*k_2}) \ldots (I + T^{*k_n})h = H \text{ soit finie p.p.}$$

et en outre que : $\int H \, d\mu \leq (1 + b) \int h \, d\mu$ .

Etant donné un réel $a > b$, on peut donc affirmer que

$$\varphi = \frac{1}{a}\left[(a+1)h - H\right]^+ \in \mathbb{L}^\infty_+ \text{ et } \varphi \text{ n'est pas négligeable.}$$

h majore $\varphi$ et n étant un entier quelconque $\geq 1$,

$$\varphi \leq \frac{1}{a}\left[(a+1)h - (I + T^{*k_n})\, h\right]^+ = \frac{1}{a}\,(ah - T^{*k_n} h)^+$$

et donc $\varphi + \frac{1}{a} T^{*k_n} h \leq h$ sur $\{\varphi > 0\}$ ce qui entraîne

$$\varphi + T^{*k_n}\varphi \leq a'h \text{ sur } \{\varphi > 0\} \text{ en posant } a' = \sup(a, 1)$$

Or $T^{*k_n}\varphi \leq a' \cdot T^{*k_n} h$ d'où l'on tire :

$$\varphi + T^{*k_n}\varphi \leq a'\,(h \vee T^{*k_n} h).$$

Supposons établie pour tout couple d'entiers (p, n), avec $2 < p < n$,

l'inégalité

$$(2) \qquad \underbrace{\varphi + T^{*k_p}\varphi + \ldots + T^{*k_p + \ldots + k_n}\varphi}_{\bar{\varphi}} \leq a' \underbrace{\left[h \vee T^{*k_p}(h \vee \ldots \vee (T^{*k_n} h))\right]}_{u}$$

On en tire $T^{*k_{p-1}}(\bar{\varphi}) \leq a'\, T^{*k_{p-1}}(u)$ et, de l'inégalité

$$\varphi \leq \frac{1}{a}\left[(a+1)h - (I + T^{*k_{p-1}}) \ldots (I + T^{*k_n})h\right]^+ \text{ on déduit comme}$$

plus haut, $\varphi + T^{*k_{p-1}}\varphi \leq a'\left[h \vee T^{*k_{p-1}} u\right]$,

autrement dit (2) est vérifiée pour le couple d'entiers (p-1, n).

On a donc prouvé, en posant $i_0 = 0$, $i_1 = k_1$, ..., $i_n = i_{n-1} + k_n$, ..., que

$$(3) \qquad \sup_{j \in N} \Big|\Big| \sum_{i_n \geq j} T^{*i_n - j}\varphi \Big|\Big|_\infty \leq a' \|h\|_\infty .$$

Posons alors la définition suivante :

Définition : La suite croissante d'entiers $\{i_n\}_{n\in N}$ est dite m-faiblement errante (en abrégé m.f.e) pour la contraction conservative T s'il existe un élément $\varphi \in L^\infty_+$, non nul, tel que :

$$(4) \qquad \sup_{j\in N} \Big|\Big| \sum_{i_n \geq j} T^{*i_n - j} \varphi \Big|\Big|_\infty < +\infty .$$

Nous venons d'établir une partie de la proposition suivante :

Proposition III-1-1. La contraction conservative T admet une suite (m.f.e) si, et seulement si, il existe h non négligeable dans $L^\infty_+$ tel que

$$\lim_n \int T^{*n} h \cdot d\mu = 0$$

L'autre partie de cette proposition est évidente car si $\varphi$ est associé à une suite (m.f.e) $\{i_n\}_{n\in \mathbb{N}}$ comme dans (4), la série dont le terme général est $\int T^{*i_n} \varphi \, d\mu$ est convergente. ■

2 - Si l'on se reporte maintenant au théorème énoncé dans la note [1] de J. Neveu, on peut formuler la négation de sa condition (3) de la façon suivante :

Il existe un h non nul dans $L^\infty_+$ et une suite infinie croissante $(0 < n_0 < n_1 < ..)$ dans $\mathbb{N}$ tels que :

$$\Big|\Big| \sum_i T^{*n_i} h \Big|\Big|_\infty \leq (1+\varepsilon) \, ||h||_\infty$$

$\varepsilon$ étant un réel positif donné.

En revenant à la construction décrite au n° 1 et choisissant $\frac{b}{a}$ suffisamment petit et a < 1, donc la suite $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en conséquence, on voit qu'il est possible de trouver une suite (m.f.e) $\{i'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et un $\varphi'$ non nul dans $L^\infty_+$

tels que

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \Big|\Big| \sum_{i'_n \geq j} T^{*i'_n - j} \varphi' \Big|\Big|_\infty \leq (1 + \varepsilon) \, ||\varphi'||_\infty$$

$\varepsilon$ étant un réel positif donné.

De toute façon la proposition III-1-1 démontre, d'après le théorème déjà cité de J. Neveu, la

Proposition III-1-2. Pour qu'il existe f dans $\mathcal{L}^1$, p.p. strictement positive et invariante sous T, il faut et il suffit que T n'admette pas de suite (m.f.e).

Nous complèterons dans le paragraphe suivant la démonstration de cette proposition d'une façon différente de celle de Neveu.

## § 2 - FORMES LINEAIRES INVARIANTES.

1. Nous allons construire des formes linéaires invariantes sur des sous-espaces de $\mathbb{L}^\infty$ qui sont utiles à considérer dans l'étude de l'équation Tf =f.

Introduisons sur $\mathbb{L}^\infty$ la relation de pré-ordre $\prec$ définie par

$$\varphi_1 \prec \varphi_2 \iff \exists \psi \in \mathbb{L}^\infty \quad \text{et} \quad \varphi_1 \leq \varphi_2 + (I - T^*)\psi,$$

Cette relation est compatible avec la structure d'espace vectoriel réel de $\mathbb{L}^\infty$ et si l'on se donne $h_o$, non nul, dans $\mathbb{L}^\infty{}_+$ on a le

Lemme III-2-1. $\lambda \in \mathbb{R}$ et $0 \prec \lambda h_o \Longrightarrow 0 \leq \lambda$ .

Démonstration. $(I - T^*)\psi \leq \lambda h_o$ entraîne :

$$\psi - T^{*n+1}\psi \leq \lambda (h_o + T^* h_o + \ldots + T^{*n} h_o),$$

et la série $\sum_{n=0}^{+\infty} T^{*n} h_o$ diverge sur un ensemble non négligeable tandis que le premier membre est borné. ■

Etant donné un $h_o$ fixé dans $\mathbb{L}^\infty_+$ et non nul, soit $P_{h_o}$ l'ensemble des $h \in \mathbb{L}^\infty$ pour lesquels il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que

$$\beta\, h_o \prec h \prec \alpha h_o \ .$$

Il est clair que $P_{h_o}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{L}^\infty$, que $h_o \in P_{h_o}$, et que $(I - T^*)(\mathbb{L}^\infty) \subset P_{h_o}$ .

Sur ce sous-espace $P_{h_o}$ est définie l'application $\rho : P_{h_o} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\rho(h) = \inf \{\lambda \mid h \prec \lambda\, h_o\} \ .$$

Proposition III-2-1. La fonction $\rho$ possède les propriétés suivantes :

i) $h \geq 0$ (resp. $\leq 0$) $\Longrightarrow$ $\rho(h) \geq 0$ (resp. $\leq 0$),

ii) $\rho$ est positivement homogène et $\rho(h_o) = 1$,

iii) $\rho$ est sous-additive,

iv) $\forall \psi \in \mathbb{L}^\infty \quad \rho(\psi - T^*\psi) = 0$.

Démonstration.

i) $h \geq 0$ (resp. $\leq 0$) $\Longrightarrow$ $h > 0$ (resp. $\prec 0$) $\Longrightarrow \rho(h) \geq 0$ (resp. $\leq 0$)

ii) Si $t$ est réel positif, $h \prec \lambda h_o \Longleftrightarrow th \prec t\,\lambda h_o$, donc

$$\rho(th) = t\rho(h) \quad \text{et} \quad \rho(0.\, h) = 0$$

iii) $\varepsilon$ étant un réel positif donné et pour $h'$, $h'' \in P_{h_o}$, il existe deux nombres $\lambda'$ et $\lambda''$ tels que :

$$\begin{cases} \lambda' \leq \rho(h') + \dfrac{\varepsilon}{2} \\ h' \prec \lambda'\, h_o \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \lambda'' \leq \rho(h'') + \dfrac{\varepsilon}{2} \\ h'' \prec \lambda''\, h_o \end{cases} \qquad \text{donc } \lambda' + \lambda'' \geq \rho(h' + h'')$$

iv) résulte de ce que, pour tout $\psi \in \mathbb{L}^\infty$, on a :

$$0 \prec \psi - T^*\psi \prec 0. \qquad \blacksquare$$

Dans ces conditions nous pouvons affirmer l'existence d'une forme linéaire $Z$ sur $P_{h_o}$ telle que :

1) $Z(h_o) = 1$ 2) $\forall h \in P_{h_o} : Z(h) \leq \rho(h)$.

- Z est une forme linéaire positive car,

$$Z(-h) \leq \rho(-h) \Longrightarrow -\rho(-h) \leq Z(h) \text{ et}$$

$$h \geq 0 \Longrightarrow -\rho(-h) \geq 0.$$

- Z est une forme linéaire invariante et, plus précisément

$\forall \varphi \in \mathbb{L}^\infty : Z(\varphi - T^*\varphi) = 0$ ce qui découle des conditions iv) et 2).

Nous avons établie la

Proposition III-2-2. Sur le sous-espace vectoriel $P_{h_o}$, associé à un élément non nul $h_o$ de $\mathbb{L}^\infty_+$, existent des formes linéaires positives non nulles et orthogonales au sous-espace $(I - T^*)\,\mathbb{L}^\infty$ de $P_{h_o}$.

2. Dans le cas particulier $h_o = 1$, il est clair que $P_{h_o} = \mathbb{L}^\infty$. Soit Z l'une des formes linéaires sur $\mathbb{L}^\infty$ donnée par la proposition précédente et supposons que $Z(1) = 1$. Si T admet une suite (m.f.e), $\varphi \in \mathbb{L}^\infty_+$ étant associé à cette suite comme dans la définition (III-1-n° 1), on a nécessairement $Z(\varphi) = 0$. Pour étudier la propriété réciproque, nous allons imposer à Z une condition supplémentaire faisant intervenir à côté de $\rho$, la fonctionnelle $\sigma$,

$$h \in \mathbb{L}^\infty \quad , \quad \sigma(h) = \frac{\lim}{n} \int \frac{1}{n} (h + T^* h + \ldots + T^{*n-1} h)\, d\mu$$

Pour tout $\lambda$ réel tel que $h \prec \lambda .1$, soit $h \leq \lambda + \psi - T^*\psi$,

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire, en supposant $\int d\mu = 1$

$$\frac{1}{n} (h + T^* h + \ldots + T^{*n-1} h) \leq \lambda + \frac{\psi - T^{*n}\psi}{n},$$

qui montre que $\sigma(h) \leq \lambda$, et par conséquent,

$$\forall h \in \mathbb{L}^\infty : \sigma(h) \leq \rho(h)$$

D'autre part l'application $h \longrightarrow \sigma(h) \in \mathbb{R}$ est une fonctionnelle positivement homogène et sur-additive. On peut donc affirmer l'existence d'une forme linéaire Z satisfaisant aux conditions :

$$\forall h \in \mathbb{L}^\infty : \quad \sigma(h) \leq Z(h) \leq \rho(h).$$

Nous sommes maintenant en mesure de compléter la démonstration de la proposition III-1-2.

En effet si l'on suppose que

(1) $\qquad h \in \mathbb{L}^\infty+ \quad$ et $\quad \sigma(h) = 0 \Longrightarrow h = 0$

on peut affirmer que dans l'espace de Riesz, dual du Banach $\mathbb{L}^\infty$, les éléments Z et 1 ne sont pas étrangers. Plus précisément, soit $g = Z \wedge 1$. Puisque $L^1$ est une bande de $(\mathbb{L}^\infty)^*$, $g \in \mathbb{L}^1+$. Supposons que l'ensemble $\{g = 0\}$ ne soit pas négligeable, l'égalité $\langle Z \wedge 1, 1_E \rangle = 0$ entraîne que [3], pour tout $\varepsilon > 0$, existent $\varphi'$, $\varphi'' \in \mathbb{L}^\infty+$ tels que

$$\varphi' + \varphi'' = 1_E \quad , \langle Z, \varphi' \rangle \leq \varepsilon, \int \varphi'' \, d\mu \leq \varepsilon.$$

Soit $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement positive de $\mathbb{R}$ telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \mu(E)$ et pour chaque $\varepsilon_n$ un couple $(\varphi'_n, \varphi''_n)$ associé à $\varepsilon_n$ comme il a été dit.

$\varphi = \inf_n (\varphi'_n)$ est un élément non négligeable de $\mathbb{L}^\infty+$ puisque

$$\inf_n (\varphi'_n) \geq 1_E - \sup_n (\varphi''_n) \quad \text{et que}$$

$$\int (1_E - \sup_n (\varphi''_n)) \, d\mu \geq \int (1_E - \sum_n \varphi''_n) \, d\mu \geq \mu(E) - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n > 0$$

Or $\langle Z, \varphi \rangle \leq \inf_n(\varepsilon_n) = 0$ est en contradiction avec (1).

Donc g est strictement positive (p.p).

Soit maintenant

$$Z = f + Z'$$

la décomposition de Riesz de Z (où $f \in \mathbb{L}^1$ + et Z' est étranger à $\mathbb{L}^1$).

En désignant aussi par T le prolongement de T à $(\mathbb{L}^\infty)^*$ , on a

$$TZ = Z = Tf + TZ'$$

d'où l'on déduit $Tf \leq f$ et donc $Tf = f$, f étant strictement positive (p.p.) d'après ce qui précède. ■

On peut grouper les résultats obtenus dans l'énoncé suivant :

Théorème III-2-1. Les conditions a), b), c), d) qui suivent sont équivalentes,

a) L'équation $Tf = f$ a, dans $\mathbb{L}^1$, une solution strictement positive (p.p.)

b) La fonctionnelle $\rho$ est strictement positive, autrement dit,

$$\varphi \in P_{h_o}, \ \rho(\varphi) = 0 \Longrightarrow \varphi = 0$$

c) La fonctionnelle $\sigma$ est strictement positive

d) T n'admet pas de suite (m.f.e).

Le seul point à préciser est que la condition $\sigma(\varphi) = 0$ entraîne $\lim_n \int T^{*n}\varphi \cdot d\mu = 0$, condition (1) du § 1, n° 1.

3. Etudions maintenant le cas où $h_o = 1_E$ et $1_{\hat{E}} = 1$, (E est dit récurrent).

En utilisant l'endomorphisme composé ${}_ET = I_{E^c} \circ T$ et l'opérateur ${}_ER = \sum_{n=0}^{\infty} {}_ET^n$ on peut écrire , en posant $P_{h_o} = P_E$ :

$$P_E = (I - {}_ET^*)(\mathbb{L}^\infty) \quad \text{car pour } \varphi \in \mathbb{L}^\infty, \text{ on a :}$$

$$\varphi = (I - {}_ET)^*\varphi = 1_E\varphi + (I - T^*)(1_{E^c}\varphi)$$

et les deux termes du second membre appartiennent bien à $P_E$. En outre $I - {}_ET^*$ est un isomorphisme, pour la structure d'espace vectoriel réel,

de $\mathbb{L}^\infty$ sur $P_E$, dont ${}_E R^*$ est l'isomorphisme réciproque. (On a un résultat analogue pour $T_E$ mais il est plus commode pour ce que nous voulons faire d'utiliser ${}_E T$).

On a d'autre part, pour tout $\varphi \in \mathbb{L}^\infty$,

${}_E R^* (I - T^*)\varphi = (I - V^*)\varphi$ en posant $V = I_E \circ T \circ {}_E R$.

$V^*$ est un endomorphisme positif de $\mathbb{L}^\infty$ et même une contraction de $\mathbb{L}^\infty$ car $V^*(1) = {}_E R^* T^*(1_E) = 1_{\hat{E}}$ avec les notations du chapitre II. Si l'on fait l'hypothèse supplémentaire que E soit récurrent, alors $1_{\hat{E}} = 1$ et $V^*$ est une contraction markovienne. En utilisant les notations du n° 1,

considérons les relations de pré-ordre $\succ_\rho$ définie sur $P_E$ avec la contraction $T^*$ et $\succ_L$ définie sur $\mathbb{L}^\infty$ avec la contraction $V^*$.

Lemme III-2-2. Si $\varphi \in P_E$ et $\psi \in \mathbb{L}^\infty$ se correspondent par la relation $\varphi = (I - {}_E T^*)\psi$, alors $\varphi \succ_\rho 0 \Longleftrightarrow \psi \succ_L 0$.

Démonstration.

$\varphi \succ_\rho 0 \Longrightarrow \exists \emptyset \in \mathbb{L}^\infty$ et $\varphi \geq (I - T^*)\emptyset \Longrightarrow \psi = {}_E R^* \varphi \geq (I - V^*)\emptyset \Longrightarrow \psi \succ_L 0$

$\psi \succ_L 0 \Longrightarrow \exists \emptyset \in \mathbb{L}^\infty$ et $\psi \geq (I - V^*)\emptyset$. Posons $\psi_1 = \psi - (I - V^*)\emptyset$. On a

$\varphi = (I - {}_E T^*)\psi = 1_E \psi_1 + (I - T^*)(\emptyset + 1_{Ec}\psi_1)$ or $1_E \psi_1 \geq 0$ donc $\varphi \succ_\rho 0$.

Une conséquence immédiate de ce lemme est que $\rho_P(\varphi) = \rho_L(\psi)$, $\rho_P$ étant définie sur $P_E$ à partir de $T^*$ et $\rho_L$ sur $\mathbb{L}^\infty$ à partir de $V^*$.

Soit $\hat{\mathbb{L}}$ le dual de l'espace de Banach $\mathbb{L}^\infty$ et $\hat{P}_E$ l'espace des formes linéaires sur $P_E$ obtenues par transposition

$$\hat{P}_E = {}_E R(\hat{\mathbb{L}})$$

$Z \in \hat{P}_E$ est solution de TZ = Z comme dans la proposition III-2-2 si, et seulement si, Y = (I - $T_E$)Z est solution de VY = y. En effet si Z est orthogonale au sous-espace (I - $T^*$) ($\mathbb{L}^\infty$) on a

$Y = (I - {}_E T)Z = (I - T)Z + 1_E TZ = 1_E Z$ et $Y = 1_E T {}_E R Y = VY$

D'autre part Y = VY entraîne $Y = 1_E TZ = Z - 1_{E^c} TZ$ donc TZ = Z.

En particulier, pour qu'il existe une fonction mesurable et finie (p.p.) f, strictement positive (p.p.), solution de l'équation Tf = f, telle que $\int_E f \, d\mu < +\infty$, il faut et il suffit qu'il existe dans $\mathbb{L}^1(E)$ une solution (strictement positive p.p.) g de l'équation Vg = g ce qui nous ramène au problème étudié au n° 2 de ce paragraphe et nous permet d'énoncer le

Théorème. Pour que l'équation Tf = f ait une solution mesurable, strictement positive et finie (p.p.) il faut et il suffit qu'il existe un ensemble récurrent E pour lequel la fonctionnelle associée $\rho_{P_E}$ soit strictement positive.

## § 3 - DENSITE D'UNE SUITE (m.f.e)

Le problème suivant nous a été posé par Hajian et Y. Ito. Si T est une contraction conservative et $\{i_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite (f.e), c'est-à-dire pour laquelle il existe $\varphi$, non nul, dans $\mathbb{L}^\infty +$, tel que

$$\sum_n T^{*i_n} \varphi \in \mathbb{L}^\infty,$$

que peut-on dire de $\frac{n}{i_n}$ quand $n \longrightarrow \infty$ ? Ces auteurs ont prouvé dans certains cas particuliers que $\frac{n}{i_n} \longrightarrow 0$, autrement dit que la densité de la suite $\{i_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle. Nous allons prouver le

Théorème III-3-1. Toute suite (m.f.e) a une densité nulle.

Démonstration. Soit $\{i_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite (m.f.e) pour la contraction conservative T et $\varphi$ un élément de $L^\infty_+$ associé à cette suite comme dans la définition (III-3-n° 1). En écrivant

$$\varphi + T^*\varphi + \ldots + T^{*i_n}\varphi$$

$$\varphi + \ldots + T^{*i_I}\varphi + \ldots \quad T^{*i_n}\varphi$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi + T^*\varphi + \ldots + T^{*i_n}\varphi$$

de telle sorte que dans chaque colonne apparaisse une séquence de termes consécutifs de l'une des séries :

$$\sum_{i_k \geq j} T^{*i_k - j}\varphi$$

dont les sommes sont bornées par un nombre a, on obtient l'inégalité

$$(n+1)\left|\left|(\varphi + T^*\varphi + \ldots + T^{*i_n}\varphi)\right|\right|_\infty \leq (2\, i_n + 1)\, a$$

d'où l'on déduit bien que $\frac{i_n}{n} \longrightarrow \infty$ . ∎

## CHAPITRE IV

### L'EQUATION FONCTIONNELLE DE HALMOS.

Etant donné une transformation $\Theta$ mesurable et inversible, de $\Omega$ sur $\Omega$, dont l'inverse $\theta^{-1}$ est aussi mesurable, ces deux transformations laissant globalement invariante la famille des ensembles négligeables, nous nous proposons d'étudier sommairement l'équation fonctionnelle :

$$f(x) = f(\Theta x)\, w(x) \quad (p.p) \ ,$$

w étant donnée dans $\mathfrak{M}$(II-1, n° 1) et supposée finie et strictement positive p.p. Les solutions f de cette équation sont aussi recherchées dans $\mathfrak{M}$.

Dans le cas particulier où w est le Jacobien de $\Theta$ cette étude nous a permis de résoudre, après Ornstein, le problème de Halmos [19]. Cette solution a fait l'objet d'un article qui doit paraître dans le Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie et ne sera donc pas exposée ici. [7]

§ 1 - Nous supposons dans ce chapitre la mesure $\mu$ finie et, par exemple, $\mu(\Omega) = 1$, ce qui ne restreint pas la généralité.

A toute $f \in \mathfrak{M}$ attachons le nombre réel positif ou nul,

$$\beta(f) = \int_{\{f \leq 1\}} f \, d\mu .$$

Le lemme suivant énonce quelques propriétés de $\beta$.

Lemme IV-1-1. a) $\forall f,g \in \mathfrak{M}$: $\beta(f) + \beta(g) = \beta(f \vee g) + \beta(f \wedge g)$

b) Pour toute suite croissante $\{f_n\}_{n \in N}$ dans $\mathfrak{M}$ on a

$$\lim_n \beta(f_n) = \beta(\lim_n f_n).$$

c) Pour toute suite décroissante $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{M}_b$, on a

$$\overline{\lim_n}\ \beta(f_n) \leq \beta(\lim_n f_n)$$

Démonstration - Posons $e_f = \{f \leq 1\}$ . On peut écrire

$$e_{f \vee g} = e_f \cap e_g \quad \text{et} \quad e_{f \wedge g} = e_f \cup e_g \quad \text{donc}$$

$$\beta(f) + \beta(g) = \int_{e_f - e_g} f\, d\mu + \int_{e_g - e_f} g\, d\mu + \int_{e_{f \vee g}} (f+g)\, d\mu$$

$$= \int_{e_f - e_g} f \wedge g\, d\mu + \int_{e_g - e_f} f \wedge g\, d\mu + \int_{e_{f \vee g}} (f \vee g + f \wedge g)\, d\mu = \beta(f \vee g) + \beta(f \wedge g)$$

Pour démontrer b) observons que $e_f = \lim_n \downarrow (e_{f_n}) = \bigcap_n (e_{f_n})$, si $f = \lim_n f_n$.

On a donc

$$\beta(f_n) \leq \int_{e_{f_n}} (f \wedge 1)\, d\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_{e_f} (f \wedge 1)\, d\mu = \beta(f) \text{ et } \overline{\lim_n}\ \beta(f_n) \leq \beta(f)$$

d'autre part

$$\beta(f_n) \geq \int_{e_f} f_n\, d\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_{e_f} f\, d\mu = \beta(f) \quad \text{et} \quad \underline{\lim_n}\ \beta(f_n) \geq \beta(f)$$

Pour c) il suffit d'écrire :

$$\beta(f_n) \leq \int_{e_f} (f_n \wedge 1)\, d\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_{e_f} (f \wedge 1)\, d\mu = \beta(f) \text{ et } \overline{\lim_n}\ \beta(f_n) \leq \beta(f)$$ ∎

Dans ce qui va suivre nous considérerons des parties non vides F de $\mathcal{M}_b$ qui sont des cônes stables vis-à-vis des opérations sup et inf appliquées à une famille dénombrable d'éléments. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de ces cônes.

Pour tout $F \in \mathcal{F}$ nous posons $\alpha(F) = \sup_{f \in F} \beta(f)$.

Lemme IV-1-2 - Pour tout $F \in \mathcal{F}$, il existe $f \in F$ telle que $\alpha(F) = \beta(f)$

Démonstration - Soit $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = \eta_1 < +\infty$ et posons $\sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k = \eta_n$.

Soit $\beta_o = \alpha(F)$ et nous pouvons supposer $\beta_o > 0$.

Prenons dans F une suite $\{f_n\}$ telle que $\beta(f_n) \geq \beta_o - \varepsilon_n$. On a,

$$\beta(f_n \wedge f_{n+1}) = \beta(f_n) + \beta(f_{n+1}) - \beta(f_n \vee f_{n+1}) \geq \beta_o - \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1},$$

et, en supposant que,

(1) $\beta(f_n \wedge f_{n+1} \cdots \wedge f_{n+p}) \geq \beta_o - \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1} \cdots - \varepsilon_{n+p}$,

un calcul analogue à celui qui vient d'être fait montre que (1) est aussi vérifiée pour les entiers n et p+1.

Si l'on pose $g_n = \inf_{j \geq n} (f_j)$ le lemme IV-1-1 montre que, $\beta(g_n) \geq \beta_o - \eta_n$. Les $g_n$ forment une suite croissante dans F dont la limite f est aussi dans F et l'on a, en appliquant le lemme IV-1-1,

$$\beta(f) = \lim_n \beta(g_n) \geq \beta_o. \qquad \blacksquare$$

Considérons maintenant une suite décroissante $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathfrak{F}$. Il est clair que l'intersection F de cette suite appartient aussi à $\mathfrak{F}$ et F n'est pas vide puisque la fonction nulle est dans tous les ensembles F.

Théorème de l'intersection - Pour toute suite décroissante $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathfrak{F}$ on a $\alpha(\bigcap_n (F_n)) = \lim_n \alpha(F_n)$.

Démonstration - En posant $F = \bigcap_n (F_n)$ on a d'abord

$$\alpha(F) \leq \lim_n \alpha(F_n)$$

On peut donc se limiter au cas où $\gamma_o = \lim_n \alpha(F_n) > 0$.

Nous aurons besoin du résultat préliminaire suivant :

Lemme IV-1-3 - Soit $F \in \mathfrak{F}$ et t un réel positif ou nul au plus égal à $\alpha(F)$. Si G est l'ensemble des éléments f de F tels que $\beta(f) \geq t$, il existe dans G un élément g que nous qualifierons d'extrémal pour t en ce sens que :

$$\forall f \in G \qquad f \vee g \in G.$$

Démonstration - Définissons sur $\mathfrak{M}$ la relation d'ordre strict $\prec$ par $f' \prec f'' \Longleftrightarrow f' \leq f''$ (p.p) et $\{f'' > f'\}$ n'est pas négligeable. Toute partie de G totalement ordonnée par $\succ$ est nécessairement dénombrable et en vertu du lemme IV-1-1 sa borne inférieure appartient à G. Il suffit alors d'appliquer le lemme de Zorn et d'observer que si f et g $\in$ G,

$$\beta(f \wedge g) + \beta(f \vee g) \geq 2t. \quad \blacksquare$$

Revenons à la démonstration du théorème.

Choisissons dans chaque $F_n$ un élément $f_n$ extrémal pour $\gamma_o$. Pour tout couple d'entiers n et p on a

$$\beta(f_n \vee f_{n+1} \vee \ldots \vee f_{n+p}) \geq \gamma_o.$$

En effet $f_{n+p-1}$ étant extrémal dans $F_{n+p-1}$, $\beta(f_{n+p-1} \vee f_{n+p}) \geq \gamma_o$ et il suffit d'itérer jusqu'à $f_n$.

Soit maintenant $g_n = \sup_{i \geq n} (f_i)$. Le lemme IV-1-1 montre que $\beta(g_n) \geq \gamma_o$ et $g_n \in F_n$. Alors $g = \lim_n \downarrow g_n$ appartient à F et d'après le même lemme $\beta(g) \geq \gamma_o$. $\blacksquare$

§ 2 - Revenons à l'équation fonctionnelle $f(x) = f(\Theta x)\, w(x)$ (p.p) et considérons pour chaque partie mesurable E de $\Omega$ l'équation :

$$1_E(x)\, f(x) = 1_E(x)\, f(\Theta x)\, w(x) \qquad (p.p)$$

L'ensemble des solutions dans $\mathfrak{M}$ de cette équation est un cône $F_E$ de $\mathfrak{F}$.

Vérifions, par exemple, que si $\{f_n\}$ est une famille dénombrable de $F_E$, $f = \sup_n (f_n)$ appartient aussi à $F_E$. Ceci résulte de ce que d'une part

$$1_E(x)\, f(x) = \sup_n \left[1_E(x)\, f_n(x)\right],$$

(en admettant que $0 \times \infty = 0$), d'autre part

$$1_E(x)\ f(\theta x)\ w(x) = \sup_n \left[1_E(x)\ f_n(\theta x)\ w(x)\right],$$

et du fait qu'il n'intervient qu'une famille dénombrable d'ensembles négligeables.

Soit alors $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'ensembles mesurables dont la réunion ne diffère de $\Omega$ que d'un ensemble négligeable. Les solutions de l'équation fonctionnelle proposée sont les éléments du cône intersection $\bigcap_k (F_{E_k})$.

Le théorème de l'intersection montre alors qu'il existe une solution non triviale (différente des fonctions constantes 0 ou $+\infty$) si, et seulement si,

$$\lim_k \alpha(F_{E_k}) > 0.$$

# CHAPITRE V

## Propriétés ergodiques de suites d'opérateurs

N. Dunford et J.T. Schwartz ont prouvé des théorèmes ergodiques mettant en jeu plusieurs endomorphismes d'un même espace $\mathbb{L}^1$. Ce sont ces résultats qui nous ont incité à chercher des extensions du lemme ergodique maximal, exposé au Chapitre II, pour des suites d'opérateurs plus généraux que les puissances successives d'une contraction. Cependant les recherches entreprises dans cette voie, qui semble difficile, nous ont conduit à des résultats assez limités.

Nous introduisons la notion de suite D-ergodique et nous démontrons pour de telles suites un théorème analogue à celui de Chacon et Ornstein. Dans le cas où l'espace de base est dénombrable nous prouvons que la validité du théorème ergodique est équivalente à la D-ergodicité, ce qui, dans une certaine mesure, peut justifier l'introduction de cette notion. Nous donnons enfin un exemple non banal de suite d-ergodique.

### § 1 - Suites D-ergodiques.

Considérons tout d'abord une contraction conservative T de $\mathbb{L}^1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$. En reprenant la construction décrite au Chap. II, § 3, on peut remarquer que la suite $\phi_{o,n}$ peut se définir pour des suites d'ensembles mesurables $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ quelconques et que la convergence p.p. de $\phi_{o,n}$

vers $1_E^{\wedge}$ reste vraie si la relation

$$E \subset \overline{\lim_n} (e_n)$$

est vérifiée. La fonction $\phi_{o,n}$ est de la forme

$$\phi_{o,n} = \Gamma_o + T^* \Gamma_1 + \ldots + T^{*n} \Gamma_n ,$$

où les $\Gamma_i \in \mathbb{L}_+^\infty$ satisfont aux conditions suivantes :

- pour $0 \leq k \leq n$ , $\Gamma_k = 0$ sur l'ensemble $(e_{k,n} \cap E)^c$ , en posant

$$e_{k,n} = \bigcup_{i=k}^{n} (e_i)$$

- pour $0 \leq k < n$ , $\Gamma_k \leq \Gamma_{k+1}$ sur l'ensemble $e_{k+1,n}$.

Observons aussi que les opérateurs $T^k$, pour tout k entier, sont d-réguliers.

Ce qui précède va pouvoir s'étendre à des cas plus généraux en introduisant les définitions suivantes :

Définition V-1-1.

Une suite d'opérateurs D-réguliers $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, vérifiant la condition: $\sum_{n \in \mathbb{N}} P_n^* \varphi = 0$ ou $+\infty$ (p.p) pour tout $\varphi \in \mathbb{L}^\infty +$, sera dite D-régulière.

Définition V-1-2.

Un élément $\varphi$ de $\mathbb{L}^\infty$ sera dit D-invariant par rapport à $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si, pour tout n, $P_n^* \varphi = \|P_n^*\|_\infty \varphi$

Etant donnés une suite D-régulière $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, un ensemble non négligeable $E \in \mathcal{A}$ et une suite $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables dont la limite supérieure contient E, nous dirons qu'une séquance $\{\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n\}$ d'éléments de $\mathcal{L}_+^\infty$ est subordonnée au couple $(E, \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ si

$$\begin{cases} 1°) \ \Gamma_n = 0 \text{ sur l'ensemble } (e_n \cap E)^c, \\ 2°) \ \Gamma_k \leq \Gamma_{k+1} \text{ sur l'ensemble } (e_k \cap E)^c \text{ pour } 0 \leq k < n \quad (1) \end{cases}$$

(1) Cette condition est moins restrictive que celle donnée dans [5] .

Faisons correspondre à chaque séquence $\{\Gamma_o,\ldots,\Gamma_n\}$, subordonnée au couple $(E,\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}})$, la fonction $\phi = P_o^*\Gamma_o +\ldots+ P_n^*\Gamma_n$. Nous désignerons par $\Lambda(E,\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ le cône convexe engendré dans $\mathbb{L}_+^\infty$ par les fonctions $\phi$ associées à toutes les séquences subordonnées à ce couple. Posons alors la définition suivante :

Définition V-1-3.

La suite D-régulière $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sera dite duale-ergodique, ou D-ergodique, si, pour tout couple $(E,\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ où E est une partie mesurable et non négligeable de $\Omega$ contenue dans $\overline{\lim_n}\,(e_n)$, il existe dans $\mathbb{L}^\infty$ une fonction non négligeable et D-invariante par rapport à $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, faiblement adhérente au cône $\Lambda(E,\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}})$. (C'est à dire pour la topologie $\sigma(\mathbb{L}^\infty,\mathbb{L}^1)$).

Ces propriétés et ces constructions ne font intervenir que les transposés $P_n^*$ et les éléments du dual $\mathbb{L}^\infty$ de $\mathbb{L}^1$. C'est la raison pour laquelle nous avons adopté le qualificatif "duale-ergodique".

Commençons par établir deux lemmes.

Lemme V-1-1.

$\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite D-régulière et $1_E \in \mathbb{L}^\infty$, l'ensemble des éléments de $\mathbb{L}_+^\infty$, D-invariants par rapport à $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et majorant $1_E$ a un plus petit élément de la forme $1_{\hat{E}}$.

Démonstration. $\mathbb{L}^\infty$ est un espace de Riesz, complètement réticulé, donc l'ensemble B,

$$B = \{\varphi \mid \varphi \in \mathbb{L}_+^\infty\ ,\ \varphi \geq 1_E\ ,\ \varphi \text{ est d-invariant p. rap. à } \{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}\}\ ,$$

qui n'est pas vide puisque $1 \in B$, a une borne inférieure $\Psi$. Pour chaque

$n \in \mathbb{N}$ on a, en posant $T_n = \frac{1}{\|P_n\|_1} P_n$, $T_n^* \psi \leq T_n^* \varphi = \varphi$ pour $\varphi \in B$, donc $T_n^* \psi \leq \psi$ qui entraîne, par D-régularité, $T_n^* \psi = \psi$. Donc $\psi \in B$ et l'indicateur $1_{\{\psi=1\}}$ est aussi invariant sous chaque $T_n^*$ et majore $1_E$. Donc $\psi = 1_{\{\psi=1\}} = 1_{\hat{E}}$. ■

Si l'on désigne par $\mathcal{J}$ la sous-tribu de $\mathcal{A}$, intersection des sous-tribus d'ensembles invariants associées à chaque contraction conservative $T_n^*$, alors $\hat{E} \in \mathcal{J}$ .

Lemme V-1-2.

Si $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est D-ergodique, pour tout couple $(E, \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ comme dans la définition V-1-3, $1_{\hat{E}}$ est faiblement adhérent au cône $\Lambda(E, \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}})$.

Démonstration. Les conditions 1°) et 2°) qui suivent la définition V-1-2 montrent que tout $\phi \in \Lambda(E, \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ majoré par 1 est aussi majoré par $1_{\hat{E}}$. Etant donné $f_o \in \mathbb{L}^1_+$ tel que $\Omega = \{f_o > 0\}$, il suffit de montrer qu'il existe dans $\bar{\Lambda}$, adhérence faible de $\Lambda(E, \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ dans $\mathbb{L}^\infty$, des éléments $\mathcal{J}$-mesurables $\psi \leq 1_{\hat{E}}$ tels que $\int f_o \psi \, d\mu$ soit aussi voisin qu'on le veut de $\int_{\hat{E}} f_o \, d\mu$ et, pour cela, nous verrons qu'étant donné un élément $\mathcal{J}$-mesurable et non nul $\psi \in \Lambda$, $\psi < 1_{\hat{E}}$, il existe un autre élément $\mathcal{J}$-mesurable $\psi' \leq 1_{\hat{E}}$ dans $\bar{\Lambda}$ tel que $\psi < \psi'$. En effet $\psi < 1_{\hat{E}}$ entraîne que $\psi$ n'est pas supérieur à $1_E$. Il existe donc un réel $\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ tel que $E' = E \cap \{\psi \leq \alpha\}$ ne soit pas négligeable. Puisque $\Lambda(E', \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \subset \Lambda(E, \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ et que $\{\psi \leq \alpha\} \in \mathcal{J}$ il existe un $\psi''$, $\mathcal{J}$-mesurable et non négligeable dans $\bar{\Lambda}(E', \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ et tel que $\psi'' \leq 1_{\hat{E}'}$. Alors $\psi' = \psi + (1-\alpha)\psi''$ remplit les conditions voulues. ■

§ 2 - Nous allons établir un lemme ergodique général, pour une suite $\mathcal{D}$-ergodique, qui contient comme cas particulier le lemme ergodique du Chap. II dans le cas où la contraction T est conservative.

Etant donnés $f \in \mathbb{L}^1$ et une suite d'opérateurs $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nous noterons $S_f$ l'ensemble $\bigcap_{k \geq o} \bigcup_{n \geq k} \{P_{k,n}\ f \geq 0\}$ où l'on a posé $P_{k,n} = P_k + P_{k+1} + .. + P_n$ et $P_{n,n} = P_n$.

Lemme ergodique général.

Etant donnés une suite $\mathcal{D}$-ergodique $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et un élément f de $\mathbb{L}^1$ on a

$$\forall E \in \mathcal{A} \quad , \quad E \subset S_f \Longrightarrow \int_{\hat{E}} f\, d\mu \geq 0 \ ,$$

$\hat{E}$ désignant l'ensemble (défini à une équivalence près) associé à E dans le lemme V-1-1.

Démonstration - Montrons tout d'abord, en posant

$$e_n = \bigcap_{k=o}^{n} \{P_{k,n}\ f \geq 0\}$$

que $S_f = \overline{\lim_n}\ (e_n)$. Il est évident que $\bigcup_{n \geq o} (e_n) \subset S_f$. D'autre part si $x \in e_n$ l'ensemble d'entiers $\{j \mid P_{n+1,j}\ f(x) \geq 0\}$ n'est pas vide et a un plus petit élément $n_1$. Les nombres $P_{k,n_1}\ f(x)$ sont positifs ou nuls pour $0 \leq k \leq n_1$ ; cela résulte de la définition de $n_1$ si $k > n$ et pour $k \leq n$ on peut écrire

$$P_{k,n_1}\ f(x) = P_{k,n}\ f(x) + P_{n+1,n_1}\ f(x)$$

et le premier terme est aussi positif puisque $x \in e_n$. On a donc prouvé que

$$\forall x \in e_n \quad , \quad \exists\, n_1 > n \quad ; \quad x \in e_{n_1} \ ;$$

ce qui entraîne :

$$\bigcup_{n\geq o} (e_n) \subset S_f \subset \overline{\lim_n} (e_n).$$

Soit maintenant E une partie mesurable de $S_f$. Prouvons que

$$\Phi \in \Lambda(E,\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \Longrightarrow \int f\ \Phi\ d\mu \geq 0.$$

Il suffit de le voir pour les $\Phi$ de la forme $P_o^* \Gamma_o + \ldots + P_n^* \Gamma_n$ où la séquence $\{\Gamma_o,\ldots,\Gamma_n\}$ est subordonnée au couple $(E,\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}})$. Or, par dualité,

$$\int f\ \Phi\ d\mu = \int F\ d\mu \quad \text{avec} \quad F = \Gamma_o . P_o\ f + \ldots + \Gamma_n . P_n\ f.$$

$F = 0$ sur le complémentaire de l'ensemble $\bigcup_{i=o}^{n} (e_i)$ et ce dernier ensemble est la réunion des ensembles disjoints deux à deux

$$e'_o \cap e'_1 \ldots \cap e'_n \text{ où, pour } 0 \leq i \leq n\ ,\ e'_i = e_i \text{ ou } e_i^c$$

et l'un au moins des $e'_i$ égale $e_i$.

Sur l'un quelconque, soit X, de ces derniers ensembles, F est une somme de termes de la forme $\Gamma_j\ .\ P_j\ f + \ldots + \Gamma_k\ .\ P_k\ f$ avec

$$e'_j = e_j^c\ ,\ e'_{j+1} = e_{j+1}^c\ ,\ldots,e'_{k-1} = e_{k-1}^c \quad \text{et} \quad e'_k = e_k\ ,$$

somme éventuellement réduite à un terme $\Gamma_k\ .\ P_k f$ avec $e'_k = e_k$. Une telle somme partielle peut aussi s'écrire :

$$\Gamma_j\ .\ P_{j,k}\ f + (\Gamma_{j+1} - \Gamma_j)\ P_{j+1,k} f + \ldots + (\Gamma_k - \Gamma_{k-1}) P_{k,k} f.$$

Elle est non négative sur X puisque sur cet ensemble contenu dans $e_k$

$$\begin{cases} \Gamma_j \leq \Gamma_{j+1} \leq \cdots \leq \Gamma_k \quad \text{et} \\ P_{j,k} f \geq 0\ ,\ P_{j+1,k} f \geq 0\ ,\ldots,\ P_{k,k} f \geq 0. \end{cases}$$

F est ainsi non négative et $\int f\ \Phi\ d\mu \geq 0$ est vérifiée.

La continuité faible de la forme linéaire $\varphi \longrightarrow \int f\ \varphi\ d\mu$ sur $L^\infty$ et le lemme V-1-2 donnent l'inégalité $\int 1_E^{\wedge} f\ d\mu \geq 0$. ∎

De ce lemme nous allons déduire le

Théorème ergodique général.

Etant donnée une suite ergodique $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si f (resp. g) appartient à $\mathbb{L}^1$ (resp. $\mathbb{L}^1_+$), alors $\lim_n \frac{P_o f+\ldots+P_n f}{P_o g+\ldots+P_n g}$ existe et est finie p.p. sur l'ensemble $\{\sup_n P_n g > 0\}$.

Démonstration. Elle est très proche de celle du théorème de Chacon et Ornstein donnée au Chap. II.

On se limite à $f \geq 0$. Soit $A = \{\sup_n P_n g > 0\}$.

Si $A' = A \cap \{\overline{\lim_n} D_n(f,g) = +\infty\}$, en posant $D_n(f,g) = \frac{\sum_{i=o}^{n} P_i f}{\sum_{i=o}^{n} P_i g}$, pour tout réel c, $A' \subset S_{f-cg}$ et $\int_{\hat{A}'} (f-cg)\, d\mu \geq 0$, donc

$$\int_{\hat{A}'} g\, d\mu = 0.$$

Mais $1_{\hat{A}'}$ est d-invariante par rapport à $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donc on a pour tout entier n

$$0 = \int 1_{\hat{A}'} g\, d\mu = \int (P_n^* 1_{\hat{A}'}) g\, d\mu = \int_{\hat{A}'} P_n g \,.\, d\mu \,.$$

On en déduit que A' est négligeable.

Soit ensuite $A'' = A \cap \{D_n(f,g)$ n'a pas de limite$\}$. Si $\mu(A'') > 0$, il existe a, b dans $\mathbb{R}$ et $E \subset A''$ $(\mu(E) > 0)$ tels que, sur E,

$$\underline{\lim_n} D_n(f,g) < a < b < \overline{\lim_n} D_n(f,g).$$

Sur E, les séries $\sum_i P_i f$ et $\sum_i P_i g$ sont divergentes, ce qui entraîne :

$$E \subset S_{ag-f} \cap S_{f-bg}$$

d'où l'on déduit, successivement :

$$\int_{\hat{E}} (ag-f)d\mu \geq 0 \,,\ \int_{\hat{E}} (f-bg)d\mu \geq 0 \,,\ \int_{\hat{E}} g\, d\mu = 0 \quad \text{et}$$

$$\int_{\hat{E}} P_n g\, d\mu = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

et ces derniers résultats contredisent l'hypothèse $\mu(E) > 0$.

■

Si l'on fait intervenir la sous-tribu $\mathcal{J}$, définie à la suite du lemme V-1-1, on obtient le

Théorème d'identification de la limite.

avec les mêmes hypothèses sur la suite $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et les fonctions f et g que celles du théorème précédent, on a

$$\lim_n D_n(f,g) = \frac{E^{\mathcal{J}}(f)}{E^{\mathcal{J}}(g)} \quad \text{sur l'ensemble } \{\sup_n P_n g > 0\}.$$

Démonstration. C'est la même que celle qui a été donnée au Chap. II dans le cas d'une contraction conservative. Le seul point différent à vérifier est que $\{\sup_n P_n g > 0\} \in \mathcal{J}$. Posons $B = \{\sum_n P_n g = 0\}$.
On a $B \subset S_{-g}$ donc, par le lemme ergodique,

$\int_{\hat{B}} -g \, d\mu \geq 0$ qui implique $\int_{\hat{B}} g \, d\mu = 0$, puis $\int_{\hat{B}} P_n g \, d\mu = 0$,

donc $1_{\hat{B}} \leq 1_B$ et $B = \hat{B} \in \mathcal{J}$ ∎

## § 3 - Cas où l'espace de base Ω est dénombrable.

Ω est l'ensemble des termes de la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et, sans restreindre la généralité, on peut supposer que $\mu[(x_k)] = 1$ pour tout ensemble $(x_k)$ à un élément. Nous noterons $f_k$ l'indicateur de $(x_k)$ et pour toute fonction f sur Ω on a $f(x_k) = \int f \, f_k \, d\mu$.

L'intérêt de ce cas particulier réside dans le théorème suivant :

Théorème d'équivalence.

Etant donnée une suite D-régulière $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'opérateurs sur $\mathcal{L}^1$, à laquelle est associée la sous tribu $\mathcal{J}$ des invariants, la relation

$$(1) \qquad \lim_n \frac{\sum_{i=o}^{n} P_i f}{\sum_{i=o}^{n} P_i g} = \frac{E^{\mathcal{J}}(f)}{E^{\mathcal{J}}(g)} \quad \underline{\text{sur}} \quad \{\sup_n P^n g > 0\}$$

est vraie pour tout couple $(f,g) \in \mathfrak{L}^1 \times \mathfrak{L}^1_+$, si, et seulement si, la suite $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est D-ergodique.

Démonstration

On peut supposer, que, pour tout n, $\sup_j (P_j^* f_n) \neq 0$ (autrement, on se ramène à ce cas, en supprimant une partie de $\mathcal{J}$).

Pour tout triplet $(p,q,n) \in \mathbb{N}^3$, on a, par dualité

$$P_{o,n} f_p(x_q) = \int (P_{o,n} f_p) f_q \, d\mu = \int f_p . P^*_{o,n}(f_q) d\mu = P^*_{o,n} f_q(x_p).$$

Supposons la condition (1) satisfaite et soit à prouver la d-ergodicité de $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Si $E = (x_r)$ et si $\overline{\lim_n} (e_n) \supset E$, il existe un ensemble infini H d'entiers n pour lesquels $x_r \in e_n$.

Pour $n \in H$ et pour tout réel $\chi > 0$, la séquence $\{\Gamma_o, \ldots, \Gamma_n\}$ où $\Gamma_o = \Gamma_1 = \ldots = \Gamma_n = \chi f_r$ est subordonnée au couple $(E, \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ et ainsi

$$\chi P^*_{o,n}(f_r) \in \Lambda(E, \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}).$$

Choisissons $x_s$ tel que $P^*_j(f_r)(x_s) \neq 0$ pour un entier j. Pour chaque $n \in H$ et supérieur à j, posons

$$\chi_n = \frac{1}{P^*_{o,n} f_r (x_s)}$$

Les fonctions $\Phi_n = \chi_n \cdot P^*_{o,n} f_r$ de $\mathfrak{L}^\infty$ sont égales à 1 au point $x_s$. Or, pour un autre point $x_q$, on peut écrire

$$\Phi_n(x_q) = \frac{P^*_{o,n} f_r(x_q)}{P^*_{o,n} f_r(x_s)} = \frac{P_{o,n} f_q(x_r)}{P_{o,n} f_s(x_r)} \xrightarrow[\{n \in H}^{n \to \infty} \frac{E^{\mathcal{J}} f_q(x_r)}{E^{\mathcal{J}} f_s(x_r)} \quad \text{et}$$

$$E^{\mathcal{J}} f_q(x_r) = \int (E^{\mathcal{J}} f_q) f_r \, d\mu = \int (E^{\mathcal{J}} f_r) f_q \, d\mu = E^{\mathcal{J}} f_r(x_q) \quad \text{donc}$$

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ n \in H}} \Phi_n(x_q) = \lambda \, E^{\mathcal{J}} f_r(x_q) = \Psi(x_q).$$

$\Psi$ est $\mathcal{J}$-mesurable, donc d-invariante par rapport à $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et pour tout $f \in \mathcal{L}^1$

$$\int f . \Phi_n \, d\mu = \frac{\int (P_{o,n} f) \, f_r \, d\mu}{\int (P_{o,n} f_s) f_r \, d\mu} = \frac{P_{o,n} f(x_r)}{P_{o,n} f_s(x_r)} \xrightarrow[\substack{n \to \infty \\ n \in H}]{} \frac{E^{\mathcal{J}} f(x_r)}{E^{\mathcal{J}} f_s(x_r)} = \int f \Psi \, d\mu$$

$\psi$ est donc faiblement adhérent au cône $\Lambda(E, \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}})$.

Si maintenant E est quelconque, il suffit d'observer que

$$E' \subset E \Longrightarrow \Lambda(E', \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \subset \Lambda(E, \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}).$$

■

## § 4 - Un exemple de suite D-ergodique.

Soient $T_1, T_2, \ldots, T_p$ descontractionsde $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ satisfaisant aux conditions :

1) les $T_i$ commutent deux à deux.

2) il existe $f_o \in \mathbb{L}^1_+$ tel que $\Omega = \{f_o > 0\}$ et

$$f_o = T_i f_o \quad (i = 1,2,\ldots,p).$$

Considérons alors la suite d'opérateurs $P_n$

$$P_n = \prod_{i=1}^{p} (T_i^{n^2} + T_i^{n^2+1} + \ldots + T_i^{2n^2-1}) \quad \text{pour} \quad n \geq 1 \quad \text{et} \quad P_o = I.$$

Nous allons démontrer que $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est d-ergodique.

Nous aurons besoin des résultats suivants :

Lemme V-4-1.

Pour toute contraction T, l'opérateur

$$S = \int_0^{+\infty} e^{\lambda T}\, e^{-\lambda}\, a(\lambda)\, d\lambda \qquad \text{avec} \qquad a(\lambda) = \lambda^{-3/2}\, e^{-\pi/\lambda}$$

est une contraction ayant les propriétés suivantes

1) Il existe un réel $\theta > 0$, indépendant de T, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{n}(T^n + T^{n+1} + \ldots + T^{2n-1}) \leq \theta \cdot S^{[\sqrt{n}]},$$

($[\sqrt{n}]$ = partie entière de $\sqrt{n}$)

2) Si $f = Tf$, alors $f = Sf$.

Démonstration -

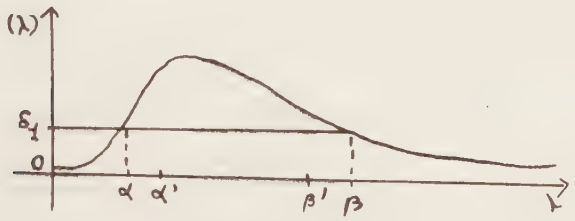
Pour tout entier $k \geq 1$

$$S^k = \int_0^{+\infty} e^{\lambda T}\, e^{-\lambda}\, \frac{1}{k^2}\, a\left(\frac{\lambda}{k^2}\right) d\lambda$$

car la transformée de Laplace de la fonction $\lambda \longrightarrow a(\lambda)$ est la fonction $\lambda' \longrightarrow e^{-2\sqrt{\pi\lambda'}}$ et que $(e^{-2\sqrt{\pi\lambda'}})^k = (e^{-2\sqrt{\pi(k^2\lambda')}})$.

$S^k$ peut aussi s'écrire sous la forme d'une série entière en T

$$S^k = \frac{1}{k^2} \sum_{j \geq 0} C_j \, T^j \quad \text{avec} \quad C_j = \frac{1}{j!} \int_0^{+\infty} \lambda^j \, e^{-\lambda} a\left(\frac{\lambda}{k^2}\right) d\lambda \ .$$




(Fig. 1)

Choisissons un réel $\alpha'$ (resp. $\beta'$) dans l'intervalle $]0, 1[$ (resp. $]8, +\infty[$). Il existe alors un réel $\delta_1 > 0$ tel que les racines $\alpha$ et $\beta$ de l'équation en $\lambda$ $a(\lambda) = \delta_1$ (fig. 1) vérifiant les inégalités :

(i) $\alpha < \alpha' , \quad \beta' < \beta ,$

(ii) $\beta' < \alpha + \alpha' \log \frac{\alpha'}{\alpha} ,$

(iii) $\beta > \beta' + \beta' \log \frac{\beta}{\alpha'}$

Il suffit d'observer que, lorsque $\delta_1 \searrow 0$, $\alpha \searrow 0$ et $\beta \nearrow +\infty$ et

$$\alpha + \alpha' \log \frac{\alpha'}{\alpha} \longrightarrow +\infty \quad , \quad \frac{1}{\beta} \left(\beta' + \beta' \log \frac{\beta}{\alpha'}\right) \longrightarrow 0$$

Ceci étant si $K = [\sqrt{n}]$, les entiers n et 2n sont dans l'intervalle $]\alpha' k^2, \beta' k^2[$ . Pour tout entier j de ce dernier intervalle, on a, en posant $\varphi(\lambda) = \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} a\left(\frac{\lambda}{k^2}\right)$,

$$(1) \qquad C_j = \int_0^{\alpha k^2} \varphi(\lambda) d\lambda + \int_{\alpha k^2}^{\beta k^2} \varphi(\lambda) \, d\lambda + \int_{\beta k^2}^{+\infty} \varphi(\lambda) \, d\lambda$$

Nous allons faire tendre k vers $+\infty$ , j restant dans l'intervalle $]\alpha' k^2, \beta' k^2[$ .

1) La limite de la première intégrale de (1) est zéro

En effet $\int_0^{\alpha k^2} \varphi(\lambda)\, d\lambda \leq \delta_1 \int_0^{\alpha k^2} \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!}\, d\lambda \leq \delta_1\, \alpha k^2\, \frac{(\alpha k^2)^j e^{-\alpha k^2}}{j^j e^{-j}\sqrt{2\pi j}}\, (1+\varepsilon_j)$

où $\varepsilon_j \longrightarrow 0$ avec $\frac{1}{j}$.

Ceci résulte du fait que $\lambda \longrightarrow \lambda^j e^{-\lambda}$ est croissante sur l'intervalle d'intégration.

On peut ensuite majorer par

$$\frac{\delta_1}{\sqrt{2\pi}}\, j^{\frac{1}{2}}\, \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^j e^{j - \alpha k^2 (1+\varepsilon_j)} \leq \frac{\delta_1}{\sqrt{2\pi}}\, j^{\frac{1}{2}}\, e^{\frac{1}{\beta'}\left[\beta' - \alpha - \alpha' \log \frac{\alpha'}{\alpha}\right] j}\, (1+\varepsilon_j)$$

et le coefficient de j dans l'exponentielle de droite est négatif (condition ii)).

2) La limite de la troisième intégrale de (1) est zéro.

Comme précédemment $\int_{\beta k^2}^{+\infty} \varphi(\lambda)\, d\lambda \leq \delta_1 \int_{\beta k^2}^{+\infty} \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!}\, d\lambda$ et

$$\int_{\beta k^2}^{+\infty} \lambda^j e^{-\lambda}\, d\lambda = \int_{\beta k^2}^{+\infty} \lambda^j e^{-\lambda\sigma} \cdot e^{-\lambda\sigma'}\, d\lambda \qquad \text{avec } \sigma + \sigma' = 1,$$

la constante $\sigma$ étant choisie dans l'intervalle $]\frac{\beta'}{\beta}, 1[$ et ceci, afin que la fonction $\lambda \longrightarrow \lambda^j e^{-\sigma\lambda}$ soit décroissante sur le champ d'intégration. On peut donc écrire :

$$\int_{\beta k^2}^{+\infty} \lambda^j e^{-\lambda\sigma} e^{-\lambda\sigma'}\, d\lambda \leq (\beta k^2)^j e^{-\sigma\beta k^2} \int_{\beta k^2}^{+\infty} e^{-\lambda\sigma'}\, d\lambda = \frac{1}{\sigma'} (\beta k^2)^j e^{-\beta k^2}.$$

Nous en déduisons que la troisième intégrale de (1) est majorée par

$$\frac{\delta_1}{\sigma'} \frac{(\beta k^2)^j}{j!} e^{-\beta k^2} \leq \frac{\delta_1}{\sigma'\sqrt{2\pi}}\, j^{-\frac{1}{2}}\, e^{\frac{1}{\beta'}(\beta' - \beta + \beta' \log \frac{\beta}{\alpha'}) j}\, (1+\varepsilon'_j)$$

ou $\varepsilon'_j \longrightarrow 0$ avec $\frac{1}{j}$

La limite étudiée est bien zéro puisque le coefficient de j dans l'exponentielle de droite est négatif (condition (iii)).

3) Pour la deuxième intégrale de (1) on peut écrire :

$$\int_{\alpha k^\ell}^{\beta k^\ell} \varphi(\lambda)\,d\lambda \geq \delta_1 \int_{\alpha k^\ell}^{\beta k^\ell} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}\,d\lambda = \delta_1 \left[1 - \int_0^{\alpha k^\ell} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}\,d\lambda - \int_{\beta k^\ell}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}\,d\lambda\right] \xrightarrow[k\to\infty]{} \delta_1$$

On a ainsi prouvé que

$$\varliminf_{k\to\infty} \; \inf_{j\in]\alpha' k^\ell, \beta' k^\ell[} (C_j) \geq \delta_1$$

Soit alors $\rho = \inf_{k\geq 1} \inf_{j\in]\alpha' k^\ell, \beta' k^\ell[} (C_j)$. $\rho$ est strictement positif et

$$S^k \geq \rho \frac{1}{k^\ell} \sum_{j=n}^{\ell n-1} T^j \geq \rho \alpha' \frac{1}{n} \sum_{j=n}^{\ell n-1} T^j \quad \text{et il suffit de prendre } \theta = \frac{1}{\alpha' \rho}$$

La propriété 2) du lemme résulte immédiatement de ce que

$$\int_0^{+\infty} a(\lambda)\,d\lambda = 1$$

Comme on le voit sur la transformée de Laplace de a. ■

Il est bon d'ajouter que S n'est pas nécessairement conservative, si T est conservative. Cependant si $Tf_o = f_o$ on a $Sf_o \leq f_o$ et, dans ce cas, S est conservative.

Revenons à la suite $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donnée au début de ce §. A chaque $T_i$ (i = 1, 2,...,p), associons la contraction $S_i$ comme dans le lemme précédent, ce qui nous permet d'écrire

$$P_n \leq \theta^p\, n^{2p}\, S_1^n \ldots S_p^n = \theta^p\, n^{2p}\, S^n,$$

en posant $S = S_1 \ldots S_p$, puisque les $S_i$ commutent comme les $T_i$. On a aussi $Sf_o = f_o$.

Lemme V-4-2.

Etant donnés,

1) une contraction T admettant un point fixe $f_o$ tel que $\Omega = \{f_o > 0\}$

2) une suite réelle, positive et croissante $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, telle que

$$\beta = \inf_n \left( \frac{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i}{n \alpha_n} \right) > 0,$$

3) un couple $(E, \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ comme dans la définition de la d-ergodicité.

Alors, pour tout entier k, il existe un entier $n \geq k$ et une séquence

$\{\Gamma_k, \ldots \Gamma_n\}$ subordonnée à $(E, \{e_{j+k}\}_{j \in \mathbb{N}})$ tels que

$$\phi = \sum_{j=k}^{n} \alpha_j T^{*j} \Gamma_j$$ possède les deux propriétés suivantes :

$$\begin{cases} a) \ \|\phi\|_\infty \leq 1, \\ b) \ \int f_o \phi \, d\mu \geq \frac{\beta}{2} \int_{\hat{E}} f_o \, d\mu. \end{cases}$$

Démonstration. D'après ce que nous avons vu au chap. II, § 3, il existe un $n \geq k$ et une séquence $\{\Gamma_k, \ldots, \Gamma_n\}$ subordonnée à $(E \{e_{j+k}\}_{j \in \mathbb{N}})$ telle que

$$\phi = \Gamma'_k + T^* \Gamma_{k+1} + \ldots + T^{*n-k} \Gamma'_n$$

Soit majorée par $1_{\hat{E}}$ et que l'on ait :

$$\int f_o \phi' \, d\mu \geq \frac{1}{2} \int_{\hat{E}} f_o \, d\mu.$$

Définissons $\Gamma_j$ pour $k \leq j \leq n$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} \Gamma_j = \frac{1}{\alpha_i} \Gamma'_i \text{ sur l'ensemble } e_{i,n} - e_{i+i,n} \text{ pour les} \\ \text{entiers } i \in [k, n[ \quad \text{et } \Gamma_j = \frac{1}{\alpha_n} \Gamma'_n \text{ sur } e_n \end{cases}$$

et posons $\phi = \sum_{j=k}^{n} \alpha_j \, T^{*j} \Gamma_j$.

La séquence $\{\Gamma_k, \ldots, \Gamma_n\}$ est aussi subordonnée au couple $(E, \{e_{j+k}\}_{j \in \mathbb{N}})$, la fonction $\phi$ est majorée par $T^{*k}\phi'$, donc $\|\phi\|_\infty \leq 1$ et puisque $Tf_\circ = f_\circ$, on a

$$\int f_\circ \, \phi \, d\mu = \int f_\circ \, (\sum_{j=k}^{n} \alpha_j \, \Gamma_j) \, d\mu \quad \text{et}$$

$$\int f_\circ \, \phi' d\mu = \int f_\circ \, (\sum_{j=k}^{n} \Gamma'_j) d\mu .$$

Sur l'un quelconque des ensembles de la forme $e_{i,n} - e_{i+1,n}$, $\Gamma_j = 0$ pour $j > i$ et

$$\sum_{j=k}^{i} \alpha_j \, \Gamma_j = \frac{1}{\alpha_i} \sum_{j=k}^{i} \alpha_j \, \Gamma'_j \geq \beta \sum_{j=k}^{i} \Gamma'_j .$$

puisque sur cet ensemble $\Gamma'_k \leq \Gamma'_{k+1} \leq \cdots \leq \Gamma'_n$ (chap. II, § 3).

On obtient ainsi

$$\int f_\circ \, \phi \, d\mu \geq \beta \int f_\circ \, \phi' d\mu \geq \frac{\beta}{2} \int_{\hat{E}} f_\circ \, d\mu \qquad \blacksquare$$

Pour achever la preuve de D-ergodicité de $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nous ajouterons la remarque suivante

Pour tout entier $\ell$ et tout endomorphisme positif R de $\mathbb{L}^\infty$,

(2) $$\mathbb{N} \ni m > \ell \Longrightarrow (\sum_{j=0}^{\ell} R^j)(R^m + R^{\ell m}) \leq (I + R^{\ell+1})(\sum_{j=m}^{\ell m - 1} R^j)$$

La suite numérique $\{n^{2p}\}_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la condition 2) du lemme V-4-2. Ce lemme appliqué à S et à la suite $\{n^{2p}\}_{n \in \mathbb{N}}$ nous permet de construire une suite de fonctions $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de la forme $\phi_k = \sum_{j=k}^{n} j^{2p} \, S^{*j} \Gamma_j$ et une suite associée $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\psi_k = \sum_{j=k}^{n} P_j^* \Gamma_j$ satisfaisant aux conditions

a) $\|\psi_k\|_\infty \leq \theta^p$

b) $\int \psi_k f_0 \, d\mu \geq \frac{\beta}{2} \int_{\hat{E}} f_0 \, d\mu$

c) $\sum_{j=0}^{\ell} T_i^{*j}(|(I-T_i^*)\psi_k|) \leq (I+T_i^{*\ell+1})(\psi_k)$ pour $k > \ell$ (conséquence immédiate de (2).

Par la faible compacité de la boule fermée de centre 0 et de rayon $\theta^p$ dans $\mathbb{L}^\infty$, la suite $\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ a une valeur d'adhérence $\psi$. b) montre que $\psi$ n'est pas nulle. Enfin c) prouve que $\psi$ est invariante sous chaque $T_i^*$, donc que $\psi$ est D—invariante par rapport à $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. ■

# B I B L I O G R A P H I E


[M] P.A. MEYER — Théorie ergodique et potentiels. Ann. de l'Institut Fourier Tome XV, Fasc. 1 (1965).

[N] J. NEVEU — Bases mathématiques du calcul des probabilités. Masson et Cie, Editeurs (1964).

[1] M.A. AKCOGLU — An ergodic lemma. Proc. Amer. Math. Soc (16) 1965 p.388-392

[2] G.D. BIRKHOFF — Proof of the ergodic theorem. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 17 (1931), p. 656 - 660.

[3] N. BOURBAKI — Livre VI, Intégration ; chap. 2. Espaces de Riesz, Hermann, Paris (1952).

[4] A. BRUNEL — C.R. Acad. Sci. Paris t. 256 (24 juin 1963) p. 5 481 - 5 484.
[5] C.R. Acad. Sci. Paris t. 259 (9 déc. 1964) p. 4 211 - 4 212.
[6] C.R. Acad. Sci. Paris t. 263 (4 juil. 1966) p. 17 - 19.
[7] Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb. 5 (1966) p. 300-303.

[9] R.V. CHACON — On the ergodic theorem without assumption of positivity. Bull. Amer. Math. Soc, 67 (1961) p. 186 - 190.
Operator averages. Bull. of the Amer. Math. Soc n° 68 (1962).

[10] R.V. CHACON et D.S. ORNSTEIN — A general ergodic theorem, Illinois J. Math, 4 (1960) p. 153 - 160.

[11] N. DUNFORD et J.T. SCHWARTZ — Convergence almost everywhere of operator averages. J. Rat. Mech. and Anal. 5 (1965) p. 129 - 178.

[12] A.B. HAJIAN et S. KAKITANI — Trans. Amer. Math. Soc, 110 (1964) p. 136 - 151.

[13] P.R. HALMOS — Lectures on ergodic theory. Publications of the Math. Soc. of Japan, 3 (1956).

[14] E. HOPF — Ergodentheorie. Ergebnisse der Math. V2, J. Springer, Berlin (1937).
[15] The general temporally discrete Markov process. J. Rat. Mech. and Anal. 3 (1954) p. 13 - 45.

[16] W. HUREWICZ — Ergodic theorems without invariant measure. Annals of Math, 45 (1944) p. 192 - 206.

7] Y. ITO — Trans. Amer. Math. Soc, 110 (1964) p. 152 - 184.

8] J. NEVEU — C.R. Acad. Sc. Paris, t. 260 (11 janv. 1965) p. 393 - 396.

9] D.S. ORNSTEIN — On invariant measures. Bull. Amer. Math. Soc, 66 (1960) p. 297 - 300.

] J.C. OXTOBY — On the ergodic theorem of Hurewicz. Ann. of Math. (2) 49 (1948) p. 872 - 884.

] F. RIESZ — Sur la théorie ergodique. Comment. Math. Helv, 17 (1945) p. 221 - 239.

22] A. IONESCU-TULCEA — On the category of certain classes of transformations in ergodic theory. Trans. Amer. Math. Soc. 114 (1965) p. 261-279.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

CHAPITRE I - Historique sommaire.

CHAPITRE II - Un lemme ergodique et son application à l'étude d'une contraction de $L^1$.

§ 1. Endomorphismes positifs de $L^1$ et opérateurs associés.. p. 8

§ 2. Produit tensoriel de deux contractions..... p.10

§ 3. Lemme ergodique maximal et théorème de Chacon et Ornstein..... p.12

§ 4. Décomposition de Hopf. Contractions conservatives et opérateurs D-réguliers..... p.16

§ 5. Identification de la limite intervenant dans le théorème de Chacon et Ornstein..... p.21

§ 6. Théorème ergodique pour certaines suites de puissances d'une contraction conservative..... p.23

§ 7. Le lemme ergodique d'Ackoglu..... p.26

CHAPITRE III - Suites m-faiblement errantes.

§ 1. Suites m-faiblement errantes..... p.30

§ 2. Formes linéaires invariantes..... p.33

§ 3. Densité d'une suite m-faiblement errante..... p.39

CHAPITRE IV - L'équation fonctionnelle de Halmos.

§ 1. Le théorème de l'intersection..... p.41

§ 2. L'équation fonctionnelle $f(x) = f(\theta x) \cdot W(x)$..... p.44

CHAPITRE V - Propriétés ergodiques de suites d'opérateurs.

§ 1. Suites D-ergodiques..... p.46

§ 2. Théorème ergodique général..... p.50

§ 3. Cas où l'espace de base est dénombrable..... p.53

§ 4. Un exemple de suite D-ergodique..... p.55

BIBLIOGRAPHIE

- DEUXIEME THESE -

PROPOSITION DE LA FACULTE

VU :
Le Président du Jury

M. de POSSEL

VU :
Le Directeur de Thèse

M. de POSSEL

VU et APPROUVE

Paris, le

Le Doyen de la Faculté des Sciences

M. ZAMANSKI

VU et PERMIS D'IMPRIMER

Paris, le

Le Recteur de l'Académie de PARIS

M. ROCHE